CÁLCULO ALGEBRAICO
Y
FUNCIONES
CONCEPTOS PRINCIPALES

Dra. Patricia Kisbye – Dr. Elvio Pilotta

Tabla de Contenidos

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo 1

Los conjuntos numéricos y sus operaciones

1.1. Introducción

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que ha cambiado en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra "cálculo" significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos *sistemas de numeración*. A través de la historia se han usado distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como un combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición *aditiva*.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman *posicionales*. Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente usamos tiene base 10, y por eso se llama *decimal*. Eso significa que podemos escribir números arbitrariamente grandes con tan sólo diez símbolos: 0, 1, 2, $\ldots$, 9. Así es como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, “dieciséis” está compuesto por las palabras “diez” y “seis”, “treinta” hace alusión a “tres” veces 10.

Los números que se usan para contar se llaman números naturales: 1, 2, 3, $\dots$. Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de las matemáticas. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que *no* hay, los números negativos para poder resolver todas las restas, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera quedaron definidos los distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos.

Haremos en este capítulo un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

1.2. Números Naturales

Los números que se usan para contar se llaman *números naturales*. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación de *sumar*. Sumar 1 es nombrar al siguiente número natural. Por ejemplo, el siguiente del 5 es el 6, y por eso $6 = 5 + 1$. De esta manera y según este orden, los primeros naturales son:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots$$

La operación de suma se extiende a todos los naturales. Así por ejemplo, como $2 = 1 + 1$, entonces $5 + 2$ es el “siguiente del siguiente de 5”, es decir que $5 + 2 = 7$.

Para indicar que un número está *antes* que otro se usa el signo $<$, y se lee “menor que”. Así por ejemplo, $2 < 5$ se lee “2 es menor que 5”, e indica que 2 está antes que el 5. Del mismo modo, el símbolo $>$ se utiliza para indicar que un número está *después* que otro y se lee “mayor que”.

La suma repetida de un mismo número se llama *multiplicación*, o también usaremos el término *producto*. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es

$$8+8+8+8+8 = 5 \cdot 8 \qquad \text{y además}$$

$$\underbrace{8+8+8+8+8}_{\text{5 veces}} = \underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{\text{8 veces}}.$$

Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4.$$

En este caso, 8 se llama la *base* y 4 el *exponente*. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma. Notemos por ejemplo que:

$$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6, \qquad \text{puesto que}$$

$$\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6}.$$

> La multiplicación de dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

La *resta* entre dos números, por ejemplo, 10 y 2, es el número que hay que sumarle a 2 para obtener 10. Se denota con el signo $-$. Decimos entonces que

$$10 - 2 = 8 \qquad \text{porque} \qquad 8 + 2 = 10.$$

1.3. Números Enteros

Ahora consideremos el siguiente problema:

Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3.

Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3 - 5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.

La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, el 0 es el número que sumado a cualquier natural da el mismo natural:

$$3 + 0 = 3, \qquad 125 + 0 = 125.$$

Así queda definida la suma de un natural con el 0 y la resta entre dos naturales iguales:

$$3 - 3 = 0, \qquad 125 - 125 = 0.$$

Además, para cada natural consideramos el *opuesto* como el número que sumado a él da 0. Así por ejemplo, el número que sumado a 1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el *opuesto* al número natural 1. El opuesto de 2 es -2, el de 3 es -3 y así sucesivamente. Todos

los opuestos de los números naturales se denominan *enteros negativos*, y a los naturales se los denomina *enteros positivos*. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.
Además, así como -3 es el opuesto de 3, también decimos que 3 es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo. Las operaciones de suma y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto, y la resta queda bien definida entre cualquier par de números enteros. En efecto, la resta entre dos números enteros se define como la suma de un número y el opuesto del otro:

$$1 - 4 = 1 + (-4) = -3, \qquad -7 - 15 = -7 + (-15) = -22.$$

Si bien la resta es una operación cerrada en el conjunto de los enteros, *no* cumple con las propiedades asociativa ni conmutativa.

Al conjunto de los *números enteros* se lo representa con la letra $\mathbb{Z}$. Así como en los naturales existe un orden natural: $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, etc, en los enteros también hay un orden compatible con el de los naturales. Los enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando 1 al número, y un *antecesor*, que se obtiene restándole 1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6 - \mathbf{1} = -7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+\mathbf{1} = -5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\cdots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots.$$

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de suma y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen para los números naturales. También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas para los enteros, excepto para 1 y -1. En el conjunto de los números enteros, destacamos dos elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el 0 y el 1.

Propiedad del número 0

- *Elemento neutro para la suma*: Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7 + 0 = 7$, $\quad -4 + 0 = -4$.

- *Multiplicación por 0*: La multiplicación por cero siempre da como resultado cero. Por ejemplo: $6 \cdot 0 = 0$, $\quad (-3) \cdot 0 = 0$.

- *Potencia con exponente 0:* Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Por ejemplo: $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

Propiedad del número 1.

- *Elemento neutro para la multiplicación*: Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número; por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$, $(-9) \cdot 1 = -9$ y $0 \cdot 1 = 0$.

Más adelante, en las clases de álgebra, se verá que esto implica la siguiente regla general:

Regla de los signos: La multiplicación entre dos enteros negativos o dos enteros positivos es un entero positivo. La multiplicación entre un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Los números enteros suelen representarse como puntos de una recta. Esto es, se eligen dos puntos distintos, uno representa el 0 y el otro el 1. Así se tiene un segmento unidad. Transportando este segmento hacia un lado de la recta se representan todos los enteros positivos, y hacia el otro todos los enteros negativos. Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún entero. La Figura 1.3.1 es una representación de algunos números enteros:

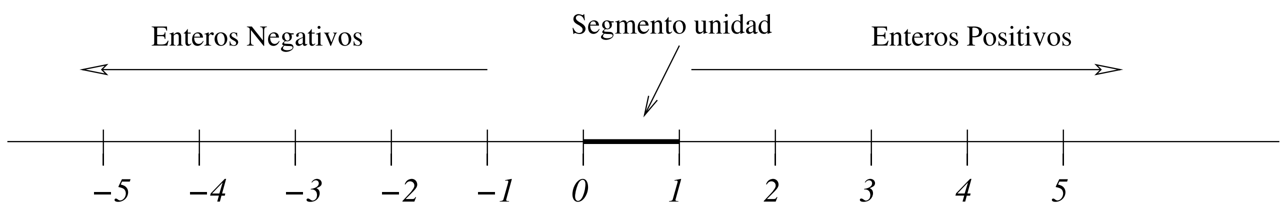


Figura 1.3.1: Representación de los números enteros en una recta

Valor absoluto: El valor absoluto de un entero positivo o cero es el mismo número, y el valor absoluto de un entero negativo es su opuesto. Se denota encerrando el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

1.3.1. La división entera

Hemos dicho que si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones de números enteros se obtienen números enteros, por lo que se dice que este conjunto es *cerrado* respecto a estas operaciones.

Existe otra operación en el conjunto de los números enteros llamada la *división entera*. La *división entera* es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros y también en el de los naturales si le agregamos el 0. La división entera entre dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, permite hallar otros dos números enteros, llamados *cociente* y *resto*. El resto es un entero no negativo y menor que el *valor absoluto* del divisor, y tal que si se le suma el producto entre el divisor y el cociente se obtiene el dividendo.

Por ejemplo, la división entre 27 y 6 tiene como cociente 4 y como resto 3 pues

$$27 = 6 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{3}.$$

También, si dividimos -124 por -50, entonces el cociente es 3 y el resto es 26 dado que

$$-124 = (-50) \cdot 3 + 26,$$

o si dividimos 1500 por 125 el cociente es 12 y el resto es 0 puesto que $1500 = 125 \cdot 12 + 0$.

Si el resto de la división es 0 se dice que el divisor *divide* al dividendo, o que el dividendo es *divisible* por el divisor o que el dividendo *es múltiplo* del divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien, 4 es divisor de 8, o 8 es múltiplo de 4 puesto que $8 = 4 \cdot 2 + \mathbf{0}$.

Ahora bien, notemos que si bien el cociente entre 27 y 6 es 4, no es cierto que $4 \cdot 6$ sea igual a 27. Por lo tanto la división entera *no* es la operación inversa a la multiplicación. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 dé como resultado 3, en el conjunto de los enteros no es posible resolver problemas como *hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 27*.

1.4. Números Racionales

Siempre que medimos algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., utilizamos una *unidad de medida*. Así es que *medimos* cuántas veces cabe nuestra unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de *números*, ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo:

Hallar el número que multiplicado por 5 *dé como resultado* 2.

La solución de dicho problema es la fracción $\dfrac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo

$$\frac{7}{3}, \qquad \frac{-2}{8}, \qquad \frac{0}{-5}, \qquad \frac{3}{3}.$$

Toda fracción multiplicada por su denominador es igual al numerador. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{5}$ multiplicada por 5 es igual a 2:

$$5 \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = 2. \tag{1.4.1}$$

Si multiplicamos la ecuación (1.4.1) en ambos miembros por 2, obtenemos

$$10 \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = 4.$$

Pero la fracción $\frac{4}{10}$ cumple la misma propiedad:

$$10 \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = 4.$$

Notemos entonces que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ representan ambas al número que multiplicado por 10 es igual a 4. Esto sugiere que las fracciones

$$\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{4}{10}$$

resuelven ambas un mismo problema. Es por ello que se dice que estas fracciones son *equivalentes*.

Las fracciones *irreducibles* son aquellas cuyo numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo entero, excepto 1 y -1. Estas fracciones tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo. Por ejemplo, $\dfrac{-10}{9}$ es una fracción irreducible, y algunas de sus fracciones equivalentes son:

$$\frac{10}{-9}, \qquad \frac{-20}{18}, \qquad \frac{-30}{27}, \qquad \dots$$

Los *números racionales* se construyen a partir de los números fraccionarios, considerando a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Al conjunto de los *números racionales* se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$ e incluye al conjunto de números enteros, y por lo tanto a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, o cualquiera de sus equivalentes.

Los números racionales suelen expresarse en notación *decimal*, por ejemplo,

$$\frac{5}{10} = 0,5.$$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como $0,28$. Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como $0,333\ldots$, y su período es 3. Para denotar el período se lo suele marcar con un arco $\frown$ sobre él.

Así tenemos los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0,06; \qquad \frac{6}{9} = 0,6666\ldots = 0,\overset{\frown}{6}\ ; \qquad \frac{3549}{990} = 3,58484\ldots = 3,5\,\overset{\frown}{84}\ .$$

Una observación es que todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Por ejemplo, $1 = 0,\overset{\frown}{9}$ ya que

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\overset{\frown}{3} = 0,\overset{\frown}{9}\ .$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación decimal finita, o infinita periódica. Así por ejemplo,

$$\frac{7}{4}, \qquad \frac{14}{8}, \qquad \frac{35}{20}, \qquad \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal finita $1{,}75$. También,

$$\frac{14}{6}, \qquad \frac{21}{9} \qquad \frac{35}{15},$$

se representan en notación decimal con $2,\overset{\frown}{3}$.

1.4.1. Operaciones entre racionales

La suma y la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (la resta respectivamente) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}.$$

En particular, tenemos que

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

por ello decimos que $\frac{-2}{3}$ es el racional opuesto a $\frac{2}{3}$, y escribimos

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Si los denominadores son distintos el problema de sumar y restar fracciones se reduce a buscar dos fracciones del mismo denominador equivalentes a las dos fracciones dadas, por lo que la metodología se reduce a transformar las fracciones a común denominador. Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, buscamos un denominador que sea múltiplo de 2 y de 3, como puede ser el 6:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Entonces

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6} = \frac{7}{6}.$$

En este caso el denominador se obtuvo como la multiplicación de los denominadores, pero es suficiente encontrar un denominador que sea múltiplo común de los denominadores. Así, para restar $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{15}$, observamos que 60 es múltiplo de 12 y 15. Entonces

$$\frac{7}{12} - \frac{8}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} - \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 5 - 8 \cdot 4}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

La multiplicación entre dos racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo,

$$\frac{2}{7} \cdot (-\frac{4}{3}) = \frac{2 \cdot (-4)}{7 \cdot 3} = -\frac{8}{21}.$$

Observemos que las siguientes multiplicaciones tienen como resultado el número 1:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1, \qquad \frac{-5}{2} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{10}{10} = 1.$$

Un número racional es el *inverso* de otro si la multiplicación entre ambos es igual a 1.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como igual a la potencia del inverso con el exponente cambiado de signo. Por ejemplo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

La *división* de un número racional por otro debe entenderse como la multiplicación del primero por el inverso del segundo. Por ejemplo, la división del número racional 3 por la fracción

$\frac{5}{4}$ consiste en multiplicar 3 por $\frac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con dos puntos $:$ o también con la línea de fracción:

$$3\,:\,\frac{5}{4}=\frac{12}{5};\qquad \text{o también}\qquad \frac{3}{\frac{5}{4}}=\frac{12}{5}.$$

La representación de los números racionales en notación decimal simplifica notablemente el cálculo en las operaciones, ya que se opera de manera similar a las operaciones entre enteros, teniendo siempre en cuenta la posición de la coma decimal. Por otro lado, también simplifica la comparación entre dos números racionales. Por ejemplo, no es obvio a simple vista cuál de los siguientes racionales es mayor: $\frac{15}{8}$ o $\frac{17}{10}$. Sin embargo, si los escribimos en notación decimal es sencillo notar que $1,675$ (igual a quince octavos) es menor que $1,7$.

1.4.2. Representación de los números racionales en la recta

Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta.

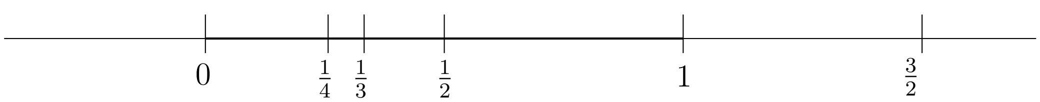


Figura 1.4.1: Representación de números racionales en una recta

Entre dos números enteros existen sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay sólo 8 números enteros; pero ¿cuántos números racionales hay? La respuesta es: ¡infinitos! Lo mismo ocurre para cualquier par de números racionales distintos que tomemos.

Para ver esto basta tomar el promedio entre ambos y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, tomemos el 0 y el 2. Ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2}=1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Calculemos ahora el promedio entre 1 y 0: $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Nuevamente obtenemos un número racional; y repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4},\quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8},\quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{16},\quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2}=\frac{1}{32}\cdots$$

¿Significa esto que si representamos todos los números racionales en una recta, habremos "llenado" toda la recta? Veremos que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que usemos, siempre quedarán puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

1.5. Números Irracionales

Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad *entren* un número entero de veces en la diagonal. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales son menores y cuáles mayores que él. [1].

La Figura 1.5.1 muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta: el arco de circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con el número $\sqrt{2}$:

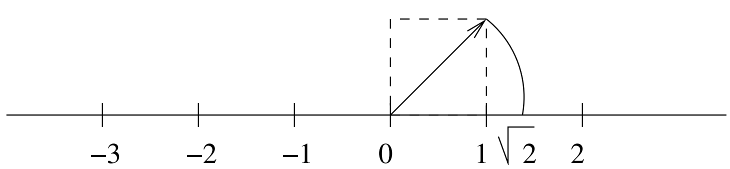


Figura 1.5.1: Ubicación en la recta numérica de $\sqrt{2}$

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el

[1] La demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional no será tema de este Curso, y se estudiará en las asignaturas de Álgebra I, Matemática Discreta I y Análisis Matemático I

tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235,1011011101111011111011111101111111011\ldots$$

representa un número irracional porque no puede identificarse un "período" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como dijimos, un conjunto infinito.

Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π: razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro, e: número de Neper y base del logaritmo natural y M: logaritmo en base 10 del número e. Los primeros 15 dígitos decimales de estos números se listan a continuación:
$\pi = 3,141592653589793\ldots$
$e = 2,718281828459045\ldots$
$M = \log_{10}(e) = 0,434294481903252\ldots$

1.6. Números Reales

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números racionales e irracionales. Este conjunto está en biyección con los puntos de una recta. Esto significa que si consideramos una recta, entonces es posible hacer corresponder a cada número real un punto de la recta, y a cada punto de la recta un único número real. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en los reales. Además todo número real distinto de cero tiene un inverso. El inverso de un número racional distinto de 0 es un número racional, y el inverso de un número irracional es un número irracional.

1.6.1. Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Notemos que las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^4 = 16, \qquad 3^4 = 81.$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4, \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{16} = -4.$$

En general, para cualquier número positivo a, definiremos la raíz cuadrada positiva de a como el número *positivo* b tal que $b^2 = a$, y lo denotaremos $b = \sqrt{a}$.

$$b = \sqrt{a} \qquad \text{si } b \text{ es positivo y } b^2 = a.$$

De manera análoga definimos la raíz cuarta positiva, raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \qquad -\sqrt[6]{64} = -2, \qquad \sqrt{100} = 10.$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4, \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Para denotar la radicación con índice natural también se utiliza la notación con exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}},$$

y de esta manera se puede extender la definición de potenciación de un número real *positivo* con cualquier exponente racional:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}, \qquad 12^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}.$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de este curso. La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la suma y la resta. Por ejemplo $(3 + 5)^2 = 64$ y $3^2 + 5^2 = 34$ por lo cual $(3 + 5)^2 \neq 3^2 + 5^2$. Asimismo $(3 - 5)^2 = 4$ y $3^2 - 5^2 = -16$ por lo que $(3 - 5)^2 \neq 3^2 - 5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos.

Así por ejemplo,

$$(3^2 - 5^2) = (3 - 5)(3 + 5).$$

Para estos números no hay mayor dificultad entre resolver la diferencia de los cuadrados ($3^2 - 5^2 = 9 - 25$) o la multiplicación entre la diferencia y la suma de los números ($(3-5)(3+5) = (-2) \cdot 8$).

Pero si se desea calcular

$$821^2 - 820^2$$

entonces es más sencillo resolver $(821 - 820)(821 + 820) = 1641$ que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 829.

Listamos a continuación algunas propiedades de las operaciones en los números reales:

Propiedad Conmutativa Intercambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación no afecta el resultado.

$$5 + 6 = 6 + 5 = 11 \qquad \text{y} \qquad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Propiedad Asociativa El orden en que se agrupan los términos de una suma o los factores en una multiplicación no altera el resultado.

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9, \qquad 2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24.$$

Propiedad Distributiva La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, en tanto que la potencia es distributiva con respecto al producto y la división.

$$(2 + 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \qquad (2 - 1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3,$$

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2, \qquad (6 : 2)^3 = 6^3 : 2^3.$$

Propiedad de las Potencias El producto y el cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, siendo los exponentes iguales a la suma y a la diferencia de los exponentes, respectivamente.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7, \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Propiedad de las Raíces La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente.

$$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}, \qquad \sqrt[4]{81 : 16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}.$$

Recalcamos que cada propiedad se satisface además en los otros conjuntos numéricos, siempre que tengan sentido en el mismo. Por ejemplo:

$$\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18},$$

es cierta en el conjunto de los números reales, pero no lo es en el conjunto de los racionales, puesto que ni $\sqrt{2}$ ni $\sqrt{18}$ son racionales.

1.6.2. Valor absoluto

Al igual que lo definimos para los números enteros, el valor absoluto de un número real positivo o cero se define como el mismo número, y el de un número negativo es su opuesto. En cualquier caso se denota encerrando entre barras al número. Así por ejemplo,

$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}, \qquad |\pi| = \pi.$$

Podemos además calcular el valor absoluto del resultado de una operación aritmética:

$$|2 - 5 \cdot 3| = |-13| = 13, \qquad |\sqrt[3]{-8} + 3| = |-2 + 3| = 1, \qquad \left|\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

El valor absoluto no es distributivo con respecto a la suma, pero sí lo es con respecto al producto y a la potenciación. Entonces por ejemplo se cumple que:

$$|3 \cdot (-5)| = |3| \cdot |-5|, \qquad |(-2)^5| = |-2|^5.$$

1.7. Números Complejos

Es importante notar que en el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de -1 debería ser un número real que al cuadrado sea igual a -1, pero esto no es posible porque el cuadrado de cualquier número real es positivo o es 0. Lo mismo ocurre si quisieramos encontrar un número que al cuadrado sea igual a -2, o -100.

Para superar este problema se define la *unidad imaginaria*, denotada con la letra i, como el *número* con la propiedad que $i^2 = -1$. A partir de este número *imaginario* se construye el conjunto de números *complejos* como el formado por todas las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Son ejemplos de números complejos los siguientes:

$$2 + 3i, \quad 4 - 4i, \quad -8 + 0i, \quad 0 + 7i.$$

Al conjunto de los números complejos se lo denota con la letra $\mathbb{C}$.

En un número complejo de la forma $a + bi$, se llama *parte real* al número a y *parte imaginaria* al número b. Así por ejemplo, $5 - \sqrt{2}i$ tiene parte real 5 y parte imaginaria $-\sqrt{2}$. En particular, los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Por ejemplo $7 = 7 + 0i$. Los números complejos cuya parte real es 0 se denominan *números imaginarios puros*, por ejemplo: $2i$. Los números imaginarios puros resuelven el problema de hallar las raíces cuadradas de números reales negativos. Por ejemplo, $2i$ y $-2i$ son las raíces cuadradas de -4, puesto que $(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = -4$ y $(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = -4$.

Para cada número complejo $a + bi$, se define su *conjugado* como el número $a - bi$, y se lo denota $\overline{a + bi}$. Así por ejemplo:

$$\overline{2 - 3i} = 2 + 3i, \qquad \overline{1 + 7i} = 1 - 7i, \qquad \overline{-5 + 8i} = -5 - 8i.$$

Es decir, el conjugado de un número complejo tiene la misma parte real, y la parte imaginaria cambiada de signo. De esta definición se deduce que el complejo conjugado de cualquier número real es el mismo número real; por ejemplo: $\overline{-8} = -8$, mientras que el complejo conjugado de un número imaginario puro es el opuesto; por ejemplo: $\overline{-8i} = 8i$.

En el conjunto de los números complejos están definidas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La suma y la resta de dos complejos se realiza sumando (restando) las partes real e imaginaria, respectivamente. Por ejemplo,

$$(3 + 5i) + (2 - i) = (3 + 2) + (5 - 1)i = 5 + 4i,$$

$$(3 + 5i) - (2 - i) = (3 - 2) + (5 - (-1))i = 1 + 6i.$$

En el caso de la multiplicación, se aplica la propiedad distributiva teniendo en cuenta la propiedad del número i:

$$(3 + 5i) \cdot (2 - i) = 3 \cdot 2 - 3i + 10i - 5i^2 = 6 + 7i + 5 = 11 + 7i.$$

Todo número complejo distinto de cero tiene un *inverso*. El inverso del número complejo $a + bi$ es $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$. En efecto,

$$(a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Así, el inverso de $3-4i$ es $\dfrac{3+4i}{3^2+4^2}$, o más precisamente $\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i$.

De esta manera, al igual que para los números reales, se define la división por un número complejo no nulo como la multiplicación por su inverso. Así por ejemplo:

$$\frac{2-3i}{3-4i}=(2-3i)\cdot\frac{3+4i}{25}=\frac{(6+12)+(8-9)i}{25}=\frac{18-i}{25}=-\frac{18}{25}-\frac{1}{25}i.$$

Volveremos sobre los números complejos cuando tratemos la resolución de ecuaciones de segundo grado. Allí nos será útil aplicar las siguientes propiedades:

- La suma de un número complejo y su conjugado siempre es un número real.

$$a+bi+(a-bi)=2a.$$

- La multiplicación entre un número complejo y su conjugado siempre es un número real, no negativo:

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2.$$

1.8. Ejercicios con números y operaciones

1. Realizar los siguientes cálculos.

a) $3-(-4+\dfrac{5}{2})=$

b) $\dfrac{-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{5}\right)}{-3}=$

c) $\dfrac{-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}{-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=$

d) $-\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{2}}\right)=$

e) $\dfrac{\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{13}\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{2}\right)}{(-2)\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}}=$

f) $\dfrac{-2}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)}-\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\left(-3+\dfrac{4}{3}\right)}{-\dfrac{1}{6}}=$

Resultados de los cálculos:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $-\frac{33}{8}$ d) $-\frac{4}{25}$ e) $\frac{27}{14}$ f) $-\frac{53}{6}$

2. Resolver las siguientes operaciones:

a) $(5+2\cdot(-4))^2 : (-3) - (5\cdot(-4)+(-6)) - (-1)^2 =$

b) $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)\right) =$

c) $\left(2+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{18} - 2\cdot\frac{1}{6} =$

d) $-\frac{1}{6}+\frac{20}{7}\cdot\left(-\frac{14}{5}\right) - \frac{\frac{16}{15}}{-\frac{2}{5}} =$

e) $-\frac{4}{\frac{1}{5}+6} - \frac{-\frac{1}{31}+1}{-\frac{1}{2}} =$

f) $(3^{-2}+2^{-1}) =$

g) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} =$

h) $\left(\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}+1}{1-\frac{2}{3-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

i) $\left(\dfrac{1-\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\frac{11}{8}-2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\right)^{-1} =$

Respuestas:

a) 22, b) $\frac{31}{20}$, c) $-\frac{1}{5}$, d) $-\frac{11}{2}$, e) $\frac{40}{31}$ f) $\frac{11}{18}$, g) $\frac{5}{8}$, h) $\frac{1}{2}$, i) $\frac{6}{25}$

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlos en una recta numérica:

$$\frac{9}{4};\quad -\frac{2}{3};\quad -\frac{6}{5};\quad \frac{7}{3};\quad -\frac{7}{4}$$

4. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales y ubicarlos en la recta numérica:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} \qquad \sqrt{12} \qquad \pi \qquad \sqrt{3} \qquad 4,\overset{\frown}{3}$$

5. Representar gráficamente en la recta numérica:

    a) los números enteros entre $-5{,}3 \quad$ y $\quad 10{,}5$,

    b) los números naturales entre $-5{,}3 \quad$ y $\quad 10{,}5$,

    c) los números reales entre $-5{,}3 \quad$ y $\quad 10{,}5$.

6. Determinar, sin hacer la división de numerador por denominador, cuáles de los siguientes números racionales tienen una representación decimal finita y cuáles no.

$$\frac{37}{5}, \qquad \frac{19}{3}, \qquad \frac{57}{6}, \qquad \frac{270}{75}, \qquad \frac{28}{700}, \qquad \frac{521}{124}.$$

7. Realizar los siguientes cálculos.

    a) $121212121 25^2 - 12121212124^2$, $\qquad$ *b*) $(25299999 - 25300001)^2$.

8. Escribir al menos 10 números racionales que estén comprendidos:

    a) entre 0 y 1, $\qquad$ b) entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, $\qquad$ c) entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

9. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes:

    a) $(\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}+3)^2$ es un número irracional.

    b) $(\sqrt{2}-3)^2 \cdot (\sqrt{2}+3)^2$ es un número entero.

    c) $(\sqrt[3]{9})^2 - (\sqrt[3]{8})^2 = \big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)\big((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8})\big)$

    d) $\left(\sqrt[3]{7}+5\right)^2 = \sqrt[3]{49} + 25$.

10. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:
$1^2 = (-1)^2$, *entonces vale que* $\sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2}$. *Simplificando, queda* $1 = -1$.

11. Indicar si las igualdades siguientes son correctas. Para las incorrectas escribir a qué número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.

    a) $\sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4}$

    b) $(3+8)^2 = 3^2 + 8^2$

    c) $\sqrt{(-4)^2} = -4$

    d) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{6}{9} = \dfrac{3+6}{4+9}$

    e) $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$

    f) $\sqrt[5]{(-8)^5} = -8$

    g) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

    h) $\dfrac{8}{6} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{9}$

    i) $\left(-\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{(-4)^3}{(-6)^3}$

    j) $\sqrt{\dfrac{25}{81}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$

    k) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$

    l) $(-8)^0 = -1$

    m) $\pi^0 = 1$

    n) $2^3 = 3^2$

12. Calcular el valor absoluto de los siguientes números:

$$3, \qquad -3{,}5, \qquad 4{,}32 \qquad 0 \qquad -0{,}4.$$

13. La distancia entre dos números reales se define como el valor absoluto de su diferencia. Así por ejemplo, la distancia entre -5 y $2{,}3$ es

$$\mathrm{d}(-5;\ 2{,}3) = |-5-2{,}3| = 7{,}3.$$

Usando esta definición, determinar la distancia entre los siguientes pares de números:

a) $-3{,}5$ y 3, *b*) 2 y $9{,}1$, *c*) $-3,5$ y $-5{,}3$,

14. Calcular

a) $(5^{-2}+12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

b) $(5^{-2})^{\frac{1}{2}}+(12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

15. Resolver sin utilizar calculadora:

a) $27^{\frac{2}{3}} =$

b) $49^{\frac{3}{2}} =$

c) $8^{\frac{2}{3}} =$

d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} =$

e) $32^{0{,}4} =$

f) $32^{-\frac{3}{5}} =$

16. Resolver las siguientes operaciones de números complejos:

a) $(2+3i)+(4-2i) =$

b) $(2+3i)-(4-2i) =$

c) $\overline{-3+2i}+3 =$

d) $(2+5i)-\overline{(2+5i)} =$

e) $(1+i)\cdot(1-i) =$

f) $(1+i)\cdot(2-i) =$

g) $i^4 =$

h) $(-i)\cdot(2i) =$

Capítulo 2

Ecuaciones lineales

2.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra una igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o más letras son las llamadas incógnitas. Esto significa que la ecuación no es una identidad cierta para todos los valores de la incógnita sino para algunos, o quizás para ninguno. Por ejemplo, si escribimos:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

esto no es propiamente una ecuación pues la identidad se cumple cualquiera sea el valor de a. En cambio, si escribimos

$$(a+1)^2 = 9,$$

esta igualdad se cumple sólo si $a = 2$ o si $a = -4$. Es una ecuación con una incógnita.

Las ecuaciones

$$2x - y = 3, \qquad 3x + y = 2z, \qquad t = 2u,$$

tienen la propiedad de que las incógnitas x, y, z y u aparecen sin estar afectadas por una potencia, radicación, ni multiplicadas unas con otras, ni en un denominador. Se dice que estas ecuaciones son **lineales** en cada una de esas incógnitas. Por ejemplo, $2x - y = 3$ es lineal en x y en y, y $t = 2u$ es lineal en t y en u.

En algunas ecuaciones podría estar involucrada una letra que no es una incógnita sino que representa una constante. Por ejemplo, la ecuación

$$ax + 3 = 5,$$

donde a representa un número real cualquiera y x es la incógnita. También en este caso diremos que la ecuación es lineal en x.

En cambio, las siguientes no son ecuaciones lineales en las incógnitas x, y y z:

$$2\sqrt{x} + 3x = 8, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad 3xy + 2 = z.$$

Esto es porque en el primer caso, la incógnita x aparece afectada por una raíz. En el segundo caso, las variables están elevadas al cuadrado, y en el tercer caso las incógnitas x e y aparecen multiplicadas entre sí. En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales en una y dos incógnitas.

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquéllas que pueden escribirse de la forma

$$ax + b = c,$$

donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

Resolver una ecuación lineal $ax + b = c$ significa encontrar la solución de la ecuación, es decir, el valor de x para el cual la ecuación es cierta. Por ejemplo, 4 no es solución de $3x + 2 = 20$, pues

$$3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 14 \neq 20.$$

En cambio 6 sí es solución pues

$$3 \cdot \mathbf{6} + 2 = 20.$$

Dos ecuaciones lineales con una incógnita son equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$3x + 2 = 20, \qquad\qquad 7x - 4 = 38$$

son ecuaciones equivalentes pues ambas tienen solución $x = 6$.
Las siguientes operaciones transforman una ecuación en otra equivalente:

- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero,
- sumar o restar a ambos miembros de la ecuación un número cualquiera.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$2x + 3 = 7,$$

y multiplicamos por 3 ambos miembros, obtenemos

$$6x + 9 = 21,$$

y si le restamos 7 a cada miembro resulta

$$2x - 4 = 0.$$

Notemos que las tres ecuaciones tienen la misma solución $x = 2$, por lo que son equivalentes.

Para resolver una ecuación lineal, lo que debemos hacer es aplicar a ambos miembros de la ecuación distintas operaciones que la transformen en una ecuación equivalente donde de un lado de la igualdad aparezca la incógnita y del otro un número que será la solución buscada. De ese modo habremos *despejado* la incógnita.

Ejemplo 2.1.1. Despejar la incógnita y resolver la ecuación lineal

$$5x + 4 = 19.$$

Restamos a ambos miembros 4 y obtenemos la ecuación equivalente

$$5x = 15.$$

Ahora dividimos ambas por 5 y obtenemos la solución:

$$x = 3.$$

En efecto,

$$5 \cdot \mathbf{3} + 4 = 19.$$

También podríamos haber dividido primero por 5 y luego haber restado $\frac{4}{5}$ en ambos miembros. La solución es la misma:

$$x + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \qquad x = \frac{19-4}{5} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}.$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos ahora las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$2x - y = 3.$$

Encontrar una solución es dar un par de números que satisfagan la ecuación. La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que ahora tendremos infinitas soluciones. Notemos que si despejamos la incógnita y en la ecuación, obtenemos

$$y = 2x - 3.$$

Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución. Por ejemplo los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x - y = 3$:

$$x = 0, \qquad y = -3,$$
$$x = 1, \qquad y = -1,$$
$$x = \frac{5}{2}, \qquad y = 2.$$

En efecto, si reemplazamos estos valores en la ecuación $y = 2x - 3$ veremos que se satisface la igualdad:

$$2 \cdot \mathbf{0} - (-\mathbf{3}) = 3, \qquad 2 \cdot \mathbf{1} - (-\mathbf{1}) = 3, \qquad 2 \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \mathbf{2} = 3.$$

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto formado por una o más ecuaciones. Lo que caracteriza al *sistema* es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de *todas* las ecuaciones planteadas en el sistema. En esta sección estudiaremos sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - y & = 3 \\ x + 4y & = 8 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x & = 7 \\ x + y & = 6. \end{cases}$$

son dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

No es necesario que las incógnitas aparezcan todas en todas las ecuaciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x & = 3 \\ 4y & = 8 \end{cases}$$

también es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de números que son solución de *ambas* ecuaciones.

Por ejemplo,

$$x = 3, \qquad y = 5,$$

es una solución del sistema

$$\begin{cases} x + y & = 8 \\ y - x & = 2 \end{cases} \qquad \text{ya que} \qquad \begin{cases} 3 + 5 & = 8 \\ 5 - 3 & = 2. \end{cases}$$

En cambio $x = 2$, $y = 6$ no es solución porque $2 + 6 = 8$ pero $6 - 2 \neq 2$.

Puede ocurrir que un sistema no tenga solución, por ejemplo

$$\begin{cases} 3x + y &= 3 \\ 3x + y &= 1. \end{cases}$$

ya que es imposible que exista un par de números x e y para los cuales $3x + y$ sea igual a 3 y a 1 simultáneamente.

Dos sistemas de ecuaciones se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y &= 13 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

son equivalentes porque ambos tienen la solución (única) $x = 3$, $y = -2$. Notemos que no es necesario que las ecuaciones de uno y otro sistema sean equivalentes.

Por otro lado, los sistemas

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 16 \\ x + 3y &= -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 5y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

no son equivalentes, puesto que si bien $x = 3$, $y = -2$ es solución en ambos sistemas, el segundo sistema tiene otras soluciones que no lo son del primero. Por ejemplo, $x = 0$, $y = 1$

2.3. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se realizan distintas transformaciones que lo hagan más simple y faciliten su resolución. Estas transfomaciones deben conservar las soluciones del sistema, es decir, deben transformar un sistema a otro equivalente. Las siguientes transformaciones son válidas:

- Cambiar una ecuación por otra equivalente.
- Reemplazar una de las ecuaciones por la que se obtiene sumando o restando las dos ecuaciones.

Para determinar la solución de un sistema pueden usarse varios métodos. En esta sección veremos los siguientes: el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.

Método de Sustitución: Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y se reemplaza la expresión resultante en la segunda ecuación y se despeja la segunda incógnita.

Método de Igualación: Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones resultantes y se despeja la otra incógnita.

Método de Reducción: Se consigue que una de las incógnitas tenga el mismo (u opuesto) coeficiente en las 2 ecuaciones, luego se restan (o suman) para eliminar dicha incógnita y reducir a una sola ecuación lineal.

Resolveremos a continuación un sistema de ecuaciones a modo de ejemplo, usando cada uno de estos métodos:

Ejemplo 2.3.1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - y & = 7 \\ 2x + 3y & = 1. \end{cases}$$

Método de sustitución:

Si despejamos y en la primera ecuación, obtenemos $y = 3x - 7$. Ahora reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación:

$$2x + 3(3x - 7) = 1, \qquad \text{es decir} \qquad 11x - 21 = 1.$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$. Reemplazamos este valor de x en la ecuación $y = 3x-7$ y obtenemos $y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$. Luego

$$x = 2, \qquad y = -1$$

es una solución del sistema.

En efecto, si reemplazamos estos valores en el sistema vemos que se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) & = 7 \\ 2 \cdot 2 + 3(-1) & = 1. \end{cases}$$

Método de igualación:

Si despejamos y en cada una de las dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y &= 3x - 7 \\ y &= \frac{1-2x}{3} \end{cases}$$

Notemos que hemos obtenido un sistema equivalente ya que reemplazamos cada ecuación por otra equivalente. Ahora notemos que si x e y son soluciones entonces debe ser

$$y = 3x - 7, \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1-2x}{3},$$

es decir

$$3x - 7 = \frac{1-2x}{3}.$$

Esta es una ecuación lineal que sabemos resolver y que tiene solución $x = 2$. Reemplazamos ahora este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y obtenemos el valor de y:

$$3 \cdot (2) - y = 7,$$

que tiene solución $y = -1$. Por lo tanto el sistema tiene la solución

$$x = -2, \qquad y = -1.$$

<u>Método de reducción:</u>

Si a la primera de las ecuaciones la multiplicamos por 3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9x - 3y &= 21 \\ 2x + 3y &= 1. \end{cases}$$

De esta manera, la incógnita y tiene los coeficientes -3 y 3 respectivamente. Así, si sumamos las dos ecuaciones llegamos a la ecuación lineal

$$11x = 22$$

que tiene como solución $x = 2$. Ahora reemplazamos este valor de x en una de las ecuaciones lineales, y obtenemos el valor para la otra incógnita: $y = -1$.

Debemos dejar en claro que no siempre pueden aplicarse cualquiera de estos métodos, como por ejemplo los casos en los que el coeficiente de una de las incógnitas es 0. Afortunadamente, estos casos son aún más fáciles de resolver. Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} 3x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

podemos despejar x en una ecuación pero no en la otra, y lo mismo ocurre con la incógnita y. Tampoco podemos igualar los coeficientes de las incógnitas porque ninguna de ellas aparece en ambas ecuaciones. Sin embargo la solución se obtiene resolviendo separadamente cada una de las dos ecuaciones. En la primera obtenemos $x = 2/3$ e y puede tomar cualquier valor, mientras que en la segunda debe ser $y = 3/2$ y x puede ser cualquiera. Como la solución del sistema debe satisfacer ambas ecuaciones, esta debe ser $x = 2/3$ e $y = 3/2$.

2.4. Sistemas compatibles e incompatibles

No todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única. Puede ocurrir que un sistema tenga infinitas soluciones, o también que no tenga ninguna. Si el sistema tiene alguna solución se dice que es un sistema *compatible*, de lo contario se dice *incompatible*. En el caso de ser compatible, puede ocurrir que tenga una única solución o que tenga infinitas soluciones. Si sólo tiene una se dice que es un sistema *determinado*, y si tiene más de una, es decir, infinitas, se dice *indeterminado*.

Ejemplo 2.4.1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ 2x + 2y & = 6. \end{cases}$$

Si despejamos x en cada una de las ecuaciones obtenemos $x = 3 - y$ en cualquiera de las dos. Es decir que debemos igualar

$$3 - y = 3 - y$$

que es claramente cierto cualquiera sea el valor de y. Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 0.$$

Hemos llegado a algo cierto, pero no hemos encontrado una solución. Esto en realidad significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones se obtienen dándole valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y. Para nuestro ejemplo, las soluciones serán todos los pares de números cuya suma es 3:

$$x = 1,\ y = 2, \quad x = 2,\ y = 1, \quad x = 4,\ y = -1, \quad x = 3/2,\ y = 3/2, \ldots$$

Un sistema de ecuaciones se dice *compatible* si tiene solución e *incompatible* si no tiene solución. Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 2.4.2. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y & = 3 \\ 6x + 3y & = 1. \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en cada una de las ecuaciones obtenemos $y = 3 - 2x$ e $y = 1/3 - 2x$. Igualando resulta

$$3 - 2x = 1/3 - 2x,$$

es decir

$$3 = \frac{1}{3}$$

Si despejamos y en la primera ecuación obtenemos $y = 3 - 2x$. Reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación y resulta $6x + 3(3 - 2x) = 1$, es decir

$$9 = 1$$

Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 3 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 8$$

Estas expresiones inconsistentes o absurdas nos indican que el sistema no tiene solución posible, es un sistema incompatible.

Resumiendo, al resolver un sistema de ecuaciones por medio de uno de los métodos que hemos presentado, pueden ocurrir una de las siguientes situaciones:

1. Llegar a una contradicción, por ejemplo $0 = 9$, $1 = 3$, lo cual significa que el sistema es incompatible, no existen soluciones.

2. Llegar a una igualdad obvia, por ejemplo $0 = 0$, $-5 = -5$, lo cual significa que el sistema es compatible, pero indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones. Éstas se obtienen dando valores a una de las incógnitas y calculando el valor de la otra.

3. Llegar a una solución única del sistema; es un sistema compatible y determinado.

2.5. Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en x y cuáles no:

   a) $x^2 + x - 5y + 2 = 0$,
   b) $x^2 + y^2 + 2xy = 10$
   c) $x - y + z = 1$
   d) $\sqrt{3x} - 2y = 4$
   e) $\sqrt{3}x - 2y = 4$
   f) $x + 3zy - y = 0$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

   a) $2x + 5 = 0$ *b*) $\dfrac{3x}{7} - 2 = 4$ *c*) $\dfrac{3x-2}{7} = 4$.
   d) $\sqrt{2}x + 3 = 1$ *e*) $\pi + \sqrt{3}x = 2\pi$ *f*) $\dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, reemplazando el valor de x en la ecuación:

   a) $x = 3$ es solución de $x^2 - 3 = 6$.
   b) $x = \sqrt{2}$ es solución de $x^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
   c) $x = \sqrt{2} + 1$ es solución de $(x-1)\sqrt{2} = 2$.

4. Los sistemas de ecuaciones dados en a), b) y c) son equivalentes al sistema

   $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7, \end{cases}.$$

   Explicar cuál es la transformación que los hace equivalentes.

   a) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12, \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \\ 2x = 7 + y. \end{cases}$

5. Decidir cuáles de las siguientes transformaciones conducen a un sistema de ecuaciones equivalente.

   a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones.

b) Reemplazar cada una de las dos ecuaciones por la suma de las dos.

c) Reemplazar una de las ecuaciones por la suma de las dos.

d) Reemplazar una de las ecuaciones por la resta entre las dos.

e) Multiplicar los dos miembros por 0.

f) Sumarle $2x + 5$ al primer miembro de cada ecuación.

6. Resuelve los siguientes problemas e indica en cuáles de ellos debiste plantear una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales:

   a) El área de un cuadrado es $125\, m^2$. ¿Cuál es la medida del lado?

   b) Hallar dos números sabiendo que su suma es 62 y su diferencia es 4.

   c) Determinar el perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor es 1 cm más largo que el menor, y el lado menor es la mitad del mayor.

   d) El triple del cuadrado de un número es 75, ¿cuál es dicho número?

   e) En una parcela, la piscina ocupa 25 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan la casa, piscina y jardín juntos?

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y también los del ejercicio 4) que no hayas resuelto. Indica para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indica si es determinado o indeterminado.

   a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ *e*) $\begin{cases} y - 3 = -x \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 4x + \frac{1}{2}y = 13 \\ -\frac{1}{3}x - 3y = -7 \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 6y + 4x = 12 \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ x - 7 = -3y \end{cases}$

8. Un grupo de personas va a un restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa, queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

9. En una granja hay varios conejos y varias jaulas, de forma que si se coloca un conejo en cada jaula, queda un conejo sin jaula y si se colocan dos conejos en cada jaula, queda una jaula vacía. Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?

10. La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De qué números se trata?

11. En un bolso hay 40 monedas, todas de 25 y 50 centavos. Si en total hay \$16,50, ¿cuántas monedas de cada valor hay?

12. Un grupo de estudiantes tiene varios libros y mochilas, de modo que si colocan seis libros en cada mochila, queda una mochila vacía y si colocan cinco libros en cada mochila, quedan dos libros sin guardar. ¿Cuántos libros y cuántas mochilas hay?

13. Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$80 por persona sola y \$150 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron \$10.980 por venta de entradas, ¿cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?

14. Si a un número de dos cifras se le suma 27, se obtiene el mismo número pero con las cifras invertidas. ¿Cuál es ese número?

Capítulo 3

Resolución de ecuaciones de segundo grado

3.1. Introducción

Hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales, que son aquellas que podemos escribir de la forma

$$ax + b = 0.$$

Si el coeficiente a es distinto de 0, entonces este tipo de ecuaciones tiene una única solución igual a $-b/a$.

En los casos en que una ecuación involucre hasta potencias de orden 2 de la incógnita, se dice que es una ecuación de segundo grado. Por ejemplo, $2x^2 - 3 = x$, o $x^2 - 4x = -4$.

Recordemos que un número x_0 es solución de la ecuación si al reemplazar a la incógnita por el número obtenemos una igualdad. A diferencia de las ecuaciones lineales, no todas las ecuaciones de segundo grado tienen una solución real pero sí es posible resolverla en el conjunto de los números complejos. A su vez, puede ocurrir que tengan una única solución o que tengan dos soluciones diferentes.

Una *ecuación de segundo grado* es una ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

siendo x la incógnita, y a, b y c números reales, $a \neq 0$.

Damos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 3.1.1. Resolver la ecuación $2x^2 - 5 = 0$.

Aquí se trata simplemente de despejar x^2,

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

y determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ejemplo 3.1.2. Resolver la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Observemos que si extraemos el factor común 2, resulta ser el cuadrado de un binomio:

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2,$$

por lo que debemos resolver la ecuación

$$2(x + 1)^2 = 0.$$

Esa ecuación tiene como única solución el valor $x = -1$.

Ejemplo 3.1.3. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

En este caso no se trata de extraer una raíz cuadrada como en el Ejemplo 3.1.1, ni tampoco consiste en el cuadrado de un binomio como en el Ejemplo 3.1.2. Sin embargo, podemos operar algebraicamente para obtener el cuadrado de un binomio.

Para ello, dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2, en este caso es 2:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Notemos que $\dfrac{5}{2}x = 2\,\dfrac{5}{4}x$, así que si en el miembro izquierdo tuviéramos el término $(5/4)^2$, entonces podríamos *armar* el cuadrado del binomio $(x + \frac{5}{4})$:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}\,x + \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Pero como este término no aparece explícitamente, entonces lo sumamos y lo restamos en la expresión del miembro izquierdo:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = x^2 + 2\frac{5}{4}x + \boldsymbol{(\frac{5}{4})^2} - \boldsymbol{(\frac{5}{4})^2} - \frac{3}{2},$$

y de esta manera hemos *completado* la expresión de modo que aparezca el cuadrado de un binomio:
$$(x+\frac{5}{4})^2-(\frac{5}{4})^2-\frac{3}{2}=0.$$
Esta ecuación se resuelve de manera mucho más simple. En efecto, queremos hallar los valores de x tales que
$$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{49}{16}$$
y estos valores son
$$x=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x=-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=-3.$$
Por lo tanto las raíces de la ecuación (3.1.3) son $x=\frac{1}{2}$ y $x=-3$.

3.2. El discriminante

Consideremos ahora la forma general de una ecuación de segundo grado:
$$ax^2+bx+c=0, \tag{3.2.1}$$
donde a, b y c son números reales arbitrarios y a es distinto de cero. Nuestro objetivo es determinar cuáles son las soluciones de esta ecuación.

Si dividimos ambos miembros por a obtenemos la siguiente expresión de la ecuación:
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{3.2.2}$$
Un artificio matemático muy utilizado, y que será de uso habitual en nuestra iniciación matemática universitaria, es la suma y resta de una misma expresión numérica o algebraica conveniente. Algo similar a lo que efectuamos en el Ejemplo 3.1.3 al sumar y restar el término $(5/4)^2$.

Así, si sumamos y restamos la expresión $\dfrac{b^2}{4a^2}$ en el miembro izquierdo de la ecuación (3.2.2), habremos completado el desarrollo del cuadrado de un binomio. Veamos esto.

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\mathbf{\frac{b^2}{4a^2}}-\mathbf{\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a} && (3.2.3)\\
&= x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} && (3.2.4)\\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} && (3.2.5)
\end{aligned}$$

Así, la ecuación (3.2.2) puede escribirse como

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0. \tag{3.2.6}$$

La expresión b^2-4ac recibe el nombre de *discriminante*, y se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ:

$$\Delta=b^2-4ac \tag{3.2.7}$$

Entonces, para hallar las soluciones o *raíces* de la ecuación de segundo grado (3.2.1) debemos resolver la ecuación

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \tag{3.2.8}$$

o equivalentemente

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{3.2.9}$$

Para resolver la ecuación (3.2.9) tendremos en cuenta tres casos: $\Delta>0$, $\Delta=0$ y $\Delta<0$.

Si $\Delta>0$, entonces existen dos soluciones reales. En efecto, si x_0 es una solución, entonces x_0 satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.2.10}$$

Finalmente, despejando x obtenemos que en este caso las raíces son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a.} \tag{3.2.11}$$

Estas soluciones suelen resumirse en la fórmula siguiente, conocida también como la *fórmula de Baskhara*:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3.2.12}$$

El símbolo $\pm$ indica que hay dos soluciones, una con el signo $+$ y la otra con el signo $-$.

Si $\Delta=0$, entonces la única solución es

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

En el caso en que $\Delta<0$, la ecuación (3.2.9) tiene soluciones en el campo de los números complejos. No es posible hallar raíces reales ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Recordemos que el número imaginario i es tal que $i^2=-1$. Así, una solución x_0 de la ecuación (3.2.9) para el caso $\Delta<0$ satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)=-i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}. \tag{3.2.13}$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{3.2.14}$$

3.3. Clasificación de las raíces

Resumimos entonces qué tipo de raíces se obtienen en una ecuación de segundo grado según sea el signo del discriminante.

a.) $b^2 - 4ac = \Delta > 0$

En este caso se obtienen **dos raíces reales y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a.} \tag{3.3.1}$$

b.) $b^2 - 4ac = \Delta = 0$

Si el discriminante es cero, entonces hay **una única raíz real doble**:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \tag{3.3.2}$$

Se dice que esta raíz es *doble*, o que la ecuación posee dos raíces iguales, pues en este caso la ecuación original (3.2.1) puede escribirse de la forma

$$a\,(x - x_0)^2 = 0.$$

c.) $b^2 - 4ac = \Delta < 0$

En este caso existen **dos raíces complejas conjugadas y distintas**:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{3.3.3}$$

Ejemplo 3.3.1. Analicemos las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$a)\ x^2 - x - 6 = 0, \qquad b)\ 3x^2 - 6x + 3 = 0, \qquad c)\ x^2 + 1 = 0.$$

Los discriminantes respectivos son:

$$a)\ \Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25, \qquad b)\ \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0, \qquad c)\ \Delta = 0 - 4 = -4.$$

Esto nos dice que la ecuación dada en a) tiene dos raíces reales distintas:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2,$$

la ecuación dada en b) tiene una única raíz doble:

$$x_0 = \frac{6-\sqrt{0}}{6} = 1,$$

y la ecuación dada en c) tiene dos raíces complejas *conjugadas*:

$$x_1 = \frac{0+i\sqrt{4}}{2} = i, \qquad x_2 = \frac{0-i\sqrt{4}}{2} = -i.$$

Ejemplo 3.3.2. La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una raíz compleja igual a $1 - 3i$. ¿Existe otra solución de la ecuación?

La respuesta es sí, porque la raíz dada es un número complejo con parte imaginaria no nula. La otra solución de la ecuación es el conjugado de $1 - 3i$, es decir, $1 + 3i$.

3.4. Propiedades de las Raíces

A partir de las expresiones dadas en (3.3.1), (3.3.2) y ((3.3.3), calcularemos la suma y la multiplicación de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Consideramos el caso $\Delta \geq 0$.

Si sumamos los valores de x_1 y x_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \tag{3.4.1}$$

Si multiplicamos las raíces, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)(-b)+(-b)(-\sqrt{\Delta})+(-b)\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}(-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2}\\
&= \frac{b^2+b\sqrt{\Delta}-b\sqrt{\Delta}-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \tag{3.4.2}$$

Si $\Delta < 0$ se obtienen las mismas relaciones con la suma y multiplicación de las raíces. En efecto:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\\
&= \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=-\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Análogamente, la multiplicación de las raíces es igual al producto de una de ellas por su conjugado, y por lo tanto es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria respectivamente:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)^2+(4ac-b^2)}{(2a)^2}\\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Una vez conocidas estas relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado podemos reescribir ésta en una forma más simple, y en muchos casos conveniente.

En efecto, notemos que reescribiendo la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ de la forma

$$a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

aparecen como coeficiente de x y como término independiente las expresiones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, que hemos visto que son iguales a

$$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2) \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{a}=x_1\cdot x_2.$$

Por lo tanto, podemos reemplazar dichos coeficientes por sus expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2-(x_1+x_2)\,x+(x_1\cdot x_2)\right) \\ &= a\left(x^2-x\,x_1-x\,x_2+x_1\cdot x_2\right) \\ &= a\left(x(x-\ x_1)-\ x_2(x-x_1)\right) \end{aligned}$$

y como $(x-x_1)$ es un factor común, esto resulta:

$$\boxed{a\,(x-\ x_1)(x-\ x_2)=0.} \tag{3.4.3}$$

Ejemplo 3.4.1. La ecuación $2x^2-2x-12=0$ tiene raíces 3 y -2, siendo $a=2$, $b=-2$ y $c=-12$. Podemos verificar las relaciones anteriores:

$$3+(-2)=-\frac{-2}{2}, \qquad 3\cdot(-2)=\frac{-12}{2}, \qquad 2x^2-2x-12=2\,(x-3)\,(x+2).$$

3.5. Resolución de ecuaciones de grado 4 con exponentes pares.

Otro conjunto particular de ecuaciones, a las cuales se les puede aplicar la teoría desarrollada en este capítulo, son las ecuaciones polinomiales de grado 4 con exponentes pares. En las mismas, un adecuado cambio de variable permite reducir el cálculo a la resolución de una ecuación de segundo grado. Por ejemplo, sea la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4-5x^2+4=0 \tag{3.5.1}$$

Notemos que esta ecuación puede escribirse de la forma

$$(x^2)^2-5(x^2)+4=0,$$

es decir, es una ecuación de segundo grado con incógnita x^2. Denotemos provisoriamente a x^2 con la letra u. Entonces, la ecuación (3.5.1) se escribe en términos de u como:

$$u^2-5u+4=0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $u_1=4$ y $u_2=1$, y por lo tanto las soluciones de (3.5.1) deben satisfacer $x^2=4$ o $x^2=1$. Los valores posibles de x son entonces $x=2$, $x=-2$, $x=1$ y $x=-1$.

3.6. Ejercicios con ecuaciones de segundo grado

1. Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,

   a) calcular el discriminante Δ,

   b) determinar si tiene 2 raíces reales distintas, una única raíz doble o dos raíces complejas,

   c) calcular las raíces x_1 y x_2, y escribir cada ecuación de la forma $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

   a) $x^2 - 5x - 5 = 0$

   b) $x^2 + x - 1 = 0$

   c) $4x^2 + 4 = 5x$

   d) $32x^2 - 20x + 3 = 0$

   e) $x^2 - 28x + 192 = 0$

   f) $x^2 + 7x - 9 = 0$

   g) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

   h) $9x^2 - 8x + 1 = 0$

2. Escribir una ecuación de segundo grado de la forma $2x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que la suma de sus raíces es 2 y su producto también. Calcular dichas raíces.

3. Escribir 3 o más ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean de igual valor absoluto pero de distinto signo, (por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$). ¿Qué forma tienen estas ecuaciones?

4. Una ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene una raíz igual a $2+3i$. ¿Cuál es la otra raíz?

5. Considerar la ecuación de segundo grado $c\,x^2 + 12\,x + c = 0$.

   a) Calcular el valor de c si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y positivas.

   b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de c obtenido en el inciso anterior.

6. La ecuación de segundo grado $a\,x^2 + 10x + a = 0$ tiene dos raíces iguales.

   a) Indique cuál es el valor de a sabiendo que las raíces son negativas.

   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de a calculado en el inciso anterior.

7. Considerar la ecuación de segundo grado $18\,x^2 + b\,x + 2 = 0$.

a) Calcular el valor de b si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y negativas.

b) Calcular las raíces de la ecuación para el valor de b obtenido en a).

8. La ecuación de segundo grado $x^2 - 3bx + 9b = 0$ tiene dos raíces iguales.

   a) Indique cuál es el valor de b sabiendo que las raíces son positivas.

   b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de b calculado en el inciso anterior.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados. Verifica la respuesta.

   a) $x^2 + 4x - 4 = 0$ *b*) $x^2 - 8x - 20 = 0$ *c*) $9x^2 + 36x + 20 = 0$

10. La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es -1 y su producto es -6. Si la ecuación es de la forma $x^2 + bx + c = 0$, encuentra el valor de b y c.

11. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que sus raíces son -1 y 3. ¿Es la única ecuación de segundo grado posible con esa propiedad? ¿Por qué?

12. Para cada una de las ecuaciones siguientes se da el valor de una raíz. Determinar el valor de la constante y el valor de la otra raíz:

    a) $x^2 - Kx + 6 = 0$ $x_1 = 3$

    b) $y^2 + 6y + K = 0$ $y_1 = 3$

    c) $w^2 + Kw + 4 = 0$ $w_1 = -2$

    d) $K\beta^2 - 3\beta + 4 = 0$ $\beta_1 = 1$

13. Resolver las siguientes ecuaciones. Verifica que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.

    a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

    b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

    c) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

    d) $x^2(x + 4) = 5x$

Capítulo 4

Funciones

4.1. Introducción

En términos matemáticos, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto. Por ejemplo, al ingresar a la Universidad, a cada estudiante se le otorga un número único de legajo. Luego, podríamos decir que *legajo* es una función que le asigna a cada alumno un número. Otro ejemplo sería asignar a cada alumno su mes de cumpleaños, y así *mes de cumpleaños* es una función del conjunto de alumnos al conjunto de meses del año. El hecho que dos alumnos cumplan años en el mismo mes no invalida que sea una función, ya que a cada estudiante es posible asignarle solo un mes de cumpleaños. De este modo, al conjunto de alumnos de un curso en particular se le asigna uno de los 12 elementos del conjunto *meses del año*. Del mismo modo, la función *legajo*, a cada estudiante del conjunto *Alumnos de la Facultad* le asigna un único número del conjunto *Números de legajo*.

En este capítulo daremos la definición y ejemplos de funciones en general, pero luego nos concentraremos particularmente con funciones entre conjuntos de números que serán las que más se trabajarán al inicio de sus carreras.

4.2. Funciones

Definimos a las funciones de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos A y B, una **función** de A en B es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.

A se llama **dominio** de f, y B es el **conjunto de llegada**.
En este texto denotaremos a las funciones con letras minúsculas: f, g, h, $\ldots$, En particular,

para indicar que f es una función del conjunto A en el conjunto B lo simbolizamos:

$$f : A \mapsto B.$$

A cada elemento a de A le corresponde un único elemento b de B. A este elemento b lo llamamos **imagen** de a por f, y lo denotamos $f(a)$.

Al subconjunto de B formado por todas las imágenes de los elementos de A se lo denomina **imagen de** f, y lo denotamos $\mathrm{Im}(f)$.

Ejemplo 4.2.1. Sean

$$A = \{\text{primavera, verano, otoño, invierno}\}, \quad B = \{\text{meses del año}\}.$$

y la función h que a cada estación del año le asigna el mes en que comienza. Entonces, como la primavera comienza en el mes de setiembre, escribimos:

$$h(\text{primavera}) = \text{setiembre},$$

y para las demás estaciones tenemos

$$h(\text{verano}) = \text{diciembre}, \quad h(\text{otoño}) = \text{marzo}, \quad h(\text{invierno}) = \text{junio}$$

El dominio de h es A, y la imagen de h es

$$\mathrm{Im}(h) = \{\text{setiembre, diciembre, marzo, junio}\}.$$

En este caso, la imagen de h es un subconjunto de B.

Ejemplo 4.2.2. Sea $A = \{\text{agosto, setiembre, octubre}\}$, y $B = \{30,\ 31\}$. Consideramos la función g que a cada mes le asigna su cantidad de días. Entonces la imagen de cada elemento de A está dada por:

$$g(\text{agosto}) = 31, \qquad g(\text{setiembre}) = 30, \qquad g(\text{octubre}) = 31.$$

Así la imagen de g es el conjunto:

$$\mathrm{Im}(g) = \{30,\ 31\},$$

es decir, en este caso la imagen de g coincide con el conjunto B.

Notemos que los elementos *agosto* y *octubre* tienen la misma imagen, y que cada uno tiene una única imagen.

En los casos en que A y B son conjuntos de números, es frecuente que la regla que determina a la función pueda ser expresada como una fórmula o expresión algebraica que indica cuál es la correspondencia. Por ejemplo, si consideramos la función f que a cada número le asigna su cuadrado, la regla se puede escribir:

$$f(x) = x^2.$$

En esta fórmula, x representa a cualquier elemento de A. Entonces, la imagen de un número en particular se obtiene aplicando la fórmula:

$$\begin{array}{rcl} h(3) = 9 & \text{dado que} & 3^2 = 9 \\ h(-3) = 9 & \text{dado que} & (-3)^2 = 9 \\ h(-0{,}2) = 0{,}04 & \text{ya que} & (-0{,}2)^2 = 0{,}04. \end{array}$$

Ejemplo 4.2.3. Si f es la función que a cada número natural le asigna su siguiente, tenemos que f es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ ($f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$), y la fórmula que define a la función f se puede escribir como:

$$f(x) = x + 1.$$

Ejemplo 4.2.4. Si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es la función que a cada número le asigna el doble de su cubo, la fórmula que define a g es:

$$g(x) = 2x^3.$$

En los casos en que la función está definida por una fórmula, se suele sobreentender que el dominio está dado por el conjunto de números en el que la fórmula se puede aplicar.

Ejemplo 4.2.5. Consideremos la función f que a cada número real le asigna su raíz cuadrada:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Como la raíz cuadrada está definida sólo para los números positivos o el 0, entonces el dominio de f está dado por

$$Dom(f) = \{x \mid x \geq 0\}.$$

Ejemplo 4.2.6. Si g es la función que a cada número le asigna su inverso:

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

entonces $g(x)$ se puede calcular siempre que x sea distinto de 0. Recordemos que el 0 es el único número real que no tiene inverso.

Luego

$$Dom(g) = \{x \mid x \neq 0\}.$$

Ejemplo 4.2.7. Si h es la función que a cada número entero le asigna su opuesto,

$$h(x) = -x,$$

entonces h se puede calcular para cualquier número entero. Por lo tanto

$$Dom(h) = \mathbb{Z}.$$

4.3. Gráficos de funciones

Si f es una función de A en B, y A y B son subconjuntos de números, entonces podemos representar a la función f con un gráfico en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para ello consideramos un sistema de ejes coordenados que denominamos *eje* x y *eje* y, y por cada punto x del dominio dibujamos el par $(x, f(x))$.

Si A y B son conjuntos de números, y $f : A \mapsto B$ es una función, el **gráfico de** f está determinado por todos los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$, con $x \in A$.

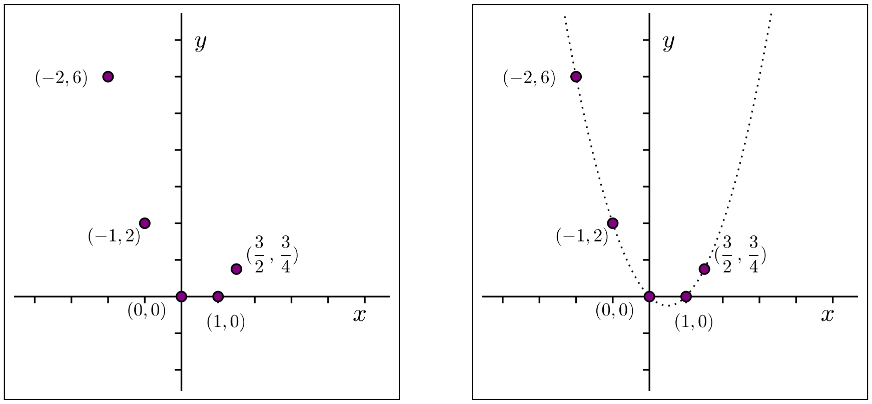
Ejemplo 4.3.1. Si f es la función determinada por la fórmula $f(x) = x^2 - x$, entonces para encontrar algunos puntos del gráfico elegimos puntos del dominio. Por ejemplo, elegimos -2, 0, 1, $\frac{3}{2}$. Con una tabla determinamos los puntos:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-2	6	$(-2, 6)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	0	$(0, 0)$
1	0	$(1, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

Tabla 4.3.1: Tabla de valores de f

Los valores de la Tabla 4.3.1 están representados en la Figura 4.3.1a.

En la Figura 4.3.1b se han representado muchos más puntos del gráfico de f. En general no es fácil determinar el gráfico de una función con sólo marcar algunos puntos, a menos que tengamos otra información sobre la función. Por ejemplo, más adelante veremos que determinadas funciones, llamadas funciones lineales, tienen un gráfico en forma de recta. Luego con marcar dos puntos, ya conocemos todo el gráfico.

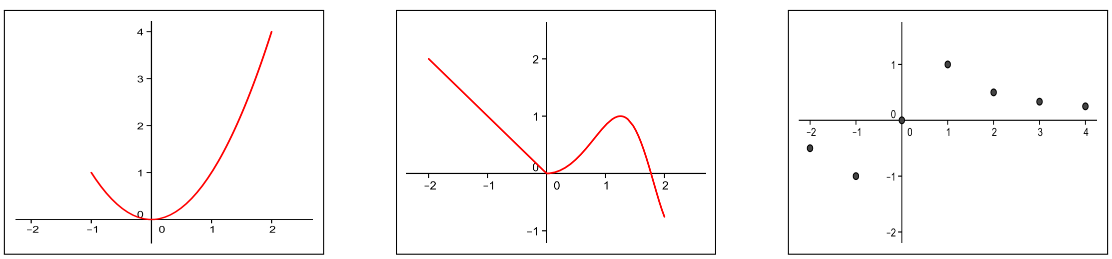


(a) Puntos de la tabla (b) Más puntos del gráfico

Figura 4.3.1: Gráfico de la función f

El gráfico de una función puede ser una línea curva, una poligonal, una combinación de ambas, o puntos aislados. Pero en ningún caso puede haber dos puntos con la misma coordenada x.

Algunos ejemplos de gráficos de funciones están dados en la Figura 4.3.2.

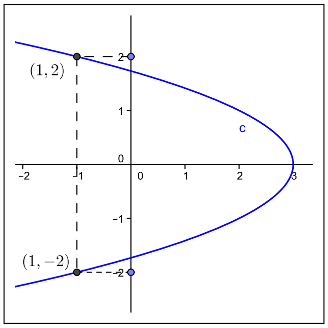


(a) (b) (c)

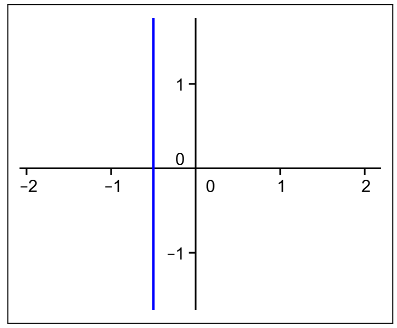
Figura 4.3.2: Gráficos de funciones

Notemos que en la Figura 4.3.2c el dominio es un conjunto de números ($\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$) que no es un intervalo real, por eso su gráfico es un conjunto de puntos aislados y no una línea continua.

Veamos cómo mejorar esta idea. Si en un gráfico hay dos puntos con la misma coordenada x, entonces no es el gráfico de una función. Esto es así pues si (a, b) y (a, c), con $b \neq c$, pertenecieran al gráfico de una función f tendría que ser $f(a) = b$ y $f(a) = c$, y esto no es posible pues, por definición, f le asigna un único valor a a. (Ver Figura 4.3.3)



(a)



(b)

Figura 4.3.3: Gráficos que no corresponden a funciones

Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones.

Ejemplo 4.3.2. Consideremos la función $f : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2.$$

Entonces el gráfico de f son todos los puntos del plano de la forma $(x, 2)$, con $x \in [0, 3]$. Algunos de estos puntos son:

$$(0, 2), (\frac{3}{2}, 2), (3, 2).$$

y el gráfico es como en la Figura 4.3.4:

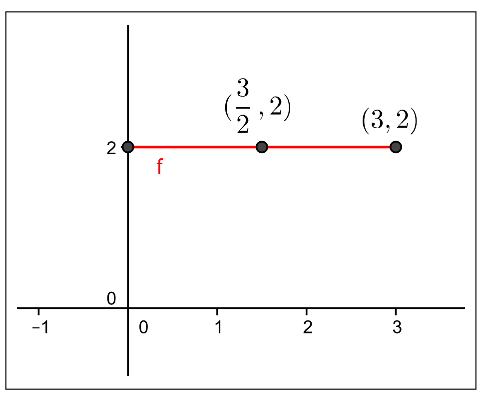


Figura 4.3.4: Gráfico de $f(x) = 2$

Ejemplo 4.3.3. Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

En este caso, no es posible representar a g completamente porque su dominio son todos los números reales. Pero podemos dar el gráfico de g para un intervalo, por ejemplo, para $[-1, 3]$.

Su gráfico está conformado por todos los puntos del plano de la forma (x, x), es decir, que tienen las dos coordenadas iguales. Algunos de los puntos del gráfico son $(0,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2,2)$: (ver Figura 4.3.5)

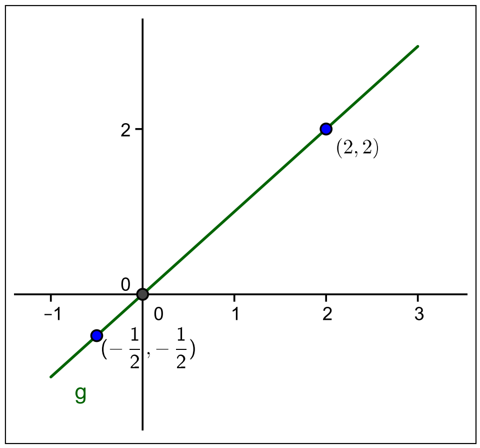


Figura 4.3.5: Gráfico de $g(x) = x$

Ejemplo 4.3.4. Consideremos la función dada por la fórmula

$$h(x) = \frac{1}{x}.$$

Los puntos del gráfico serán de la forma $(x, \frac{1}{x})$. En principio no resulta simple darse cuenta cuál es la forma del gráfico, así que nos ayudamos con una tabla y representamos algunos puntos:

x	$h(x)$	$(x, h(x))$
-3	$-\frac{1}{3}$	$(-3, -\frac{1}{3})$
-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2, -\frac{1}{2})$
-1	-1	$(-1, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{3}$	$(3, \frac{1}{3})$

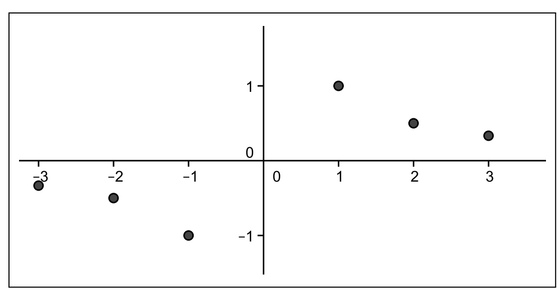


Figura 4.3.6: Algunos puntos del gráfico $h(x) = \frac{1}{x}$

¿Alcanzan estos puntos para graficar toda la función? ¿Cómo es el gráfico entre los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$? Es conveniente considerar algunos puntos más del dominio, por ejemplo $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-0{,}001$, $0{,}001$. Continuando con la tabla, obtenemos algunos puntos más del gráfico:

x	$h(x)$	$(x, h(x))$
$-1/2$	-2	$(-\frac{1}{2}, -2)$
$-1/3$	-3	$(-\frac{1}{3}, -3)$
$1/3$	3	$(\frac{1}{3}, 3)$
$1/2$	2	$(\frac{1}{2}, 2)$
$-0{,}001$	-1000	$(-0{,}001, -1000)$
$0{,}001$	1000	$(0{,}001, 1000)$

No hemos representado en el gráfico los puntos $(-0{,}001, -1000)$ y $(0{,}001, 1000)$, pero nos ayuda a comprender cómo los valores de la función se hacen muy grandes (positivos o negativos) cuando nos aproximamos al 0. Con una línea continua se ha representado el gráfico de h:

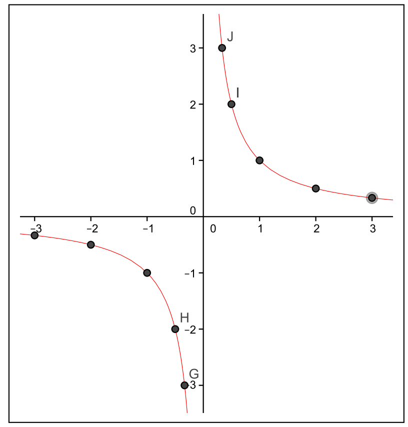


Figura 4.3.7: Gráfico de $h(x) = \frac{1}{x}$

Interpretación de gráficos: Más adelante veremos cómo graficar determinadas funciones, como por ejemplo las funciones lineales, cuadráticas, trigonométicas. En estos casos, la fórmula que define a estas funciones nos da suficiente información para dar un gráfico bastante aproximado.

Ahora bien, ¿por qué querríamos graficar una función? ¿Nos aporta alguna información importante el gráfico o alguna información que no se puede hacer evidente sólo con la fórmula o regla de asignación?

La respuesta es que sí. A partir del gráfico y sin conocer su fórmula, podemos deducir varias propiedades de la función. Por ejemplo, el gráfico nos puede dar información sobre el dominio, la imagen, para qué valores en el dominio la función es positiva, o negativa, o mayor que 1, o igual a -2, o cuál es el valor máximo que alcanza la función, o el valor mínimo.

Ejemplo 4.3.5. Consideremos el gráfico de una función f, como se muestra de la Figura 4.3.8 a 4.3.12:

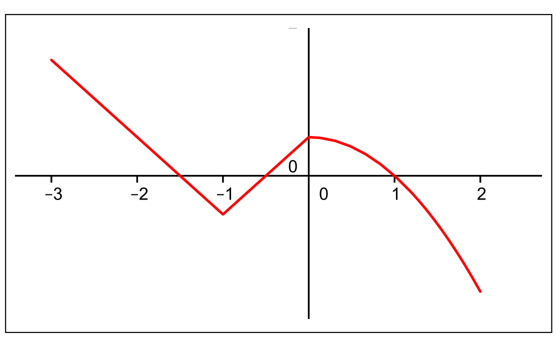


Figura 4.3.8: Gráfico de f

Si bien no conocemos la fórmula de la función, observando el gráfico podemos deducir algunas propiedades:

1. El dominio de f: es el conjunto de puntos en el eje x que están por debajo o por encima del gráfico. (Ver el trazo grueso sobre el eje x en la Figura 4.3.9). Así, el dominio de f se visualiza **sobre el eje** x, y en particular x está en el dominio si la recta vertical que pasa por x corta al gráfico.

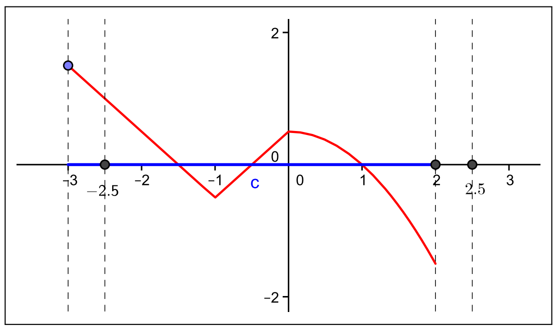


Figura 4.3.9: Dominio de $f = [-3, 2]$

Por ejemplo, en la Figura 4.3.9 podemos observar que $-2{,}5$ pertenece al dominio de la función, y en cambio $2{,}5$ no pertenece.

2. La imagen de f: Determinar la imagen de una función a partir de su fórmula no suele ser una tarea sencilla. Pero el gráfico nos permite visualizarlo como aquellos puntos **sobre el eje** y tales que si trazamos una recta horizontal ésta corta al gráfico de la función. Si trazamos rectas horizontales por los extremos del gráfico, la imagen de la función quedará encerrada, en el eje y, entre dichas rectas. (Ver Figura 4.3.10)

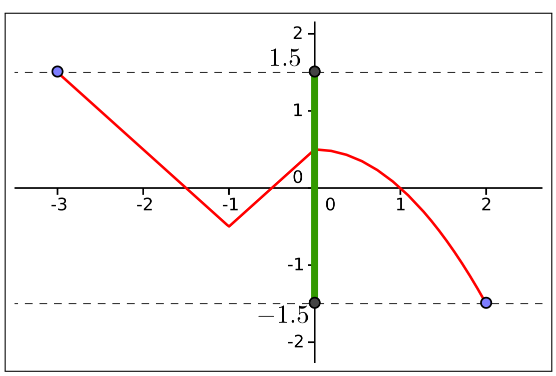


Figura 4.3.10: Imagen de $f = [-1{,}5,\ 1{,}5]$

3. Los valores de x para los cuales $f(x) \geq 0$: Para esto observamos las partes del gráfico que corresponden a $f(x) \geq 0$, es decir, la segunda coordenada es positiva o cero. Los valores que estamos buscando son aquellos x que quedan por debajo de esa parte del gráfico:

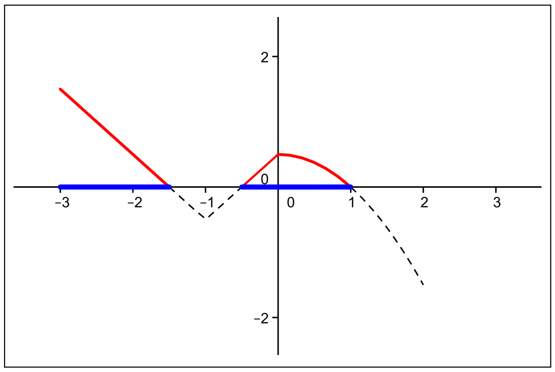


Figura 4.3.11: $\{x \mid f(x) \geq 0\}$

En la Figura 4.3.11 vemos que $f(x) \geq 0$ si x pertenece al intervalo $[-3, -1{,}5]$ o al intervalo $[-0{,}5, 1]$.

En caso que quisiéramos determinar para qué valores de x se cumple $f(x) > 0$, tendremos que excluir los puntos donde la función vale 0. Como $f(x) = 0$ para $x = -1{,}5$, $x = -0{,}5$ y $x = 1$, resulta

$$\{x \mid f(x) > 0\} = [-3, -1{,}5) \cup (-0{,}5, 1).$$

Si ahora queremos ver para qué valores de x se cumple $f(x) = 0{,}5$, trazamos la recta $y = 0{,}5$ y marcamos los puntos de intersección con el gráfico de f. En este caso, son los puntos $(0, 0{,}5)$ y $(-2, 0{,}5)$. Luego $f(x) = 0{,}5$ para $x = -2$ y para $x = 0$. (Ver Figura 4.3.12)

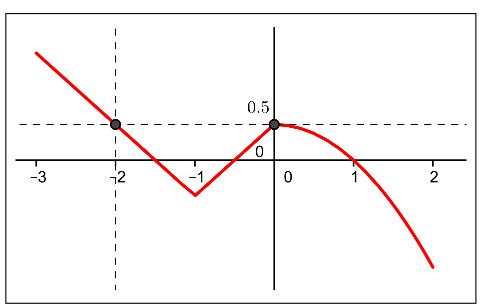


Figura 4.3.12: Imagen de g

Ejemplo 4.3.6. Consideremos una función g con el gráfico de la Figura 4.3.13.

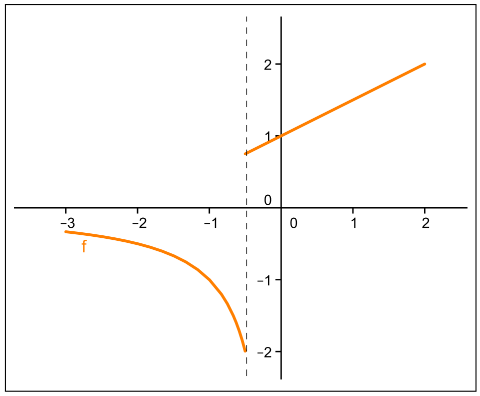
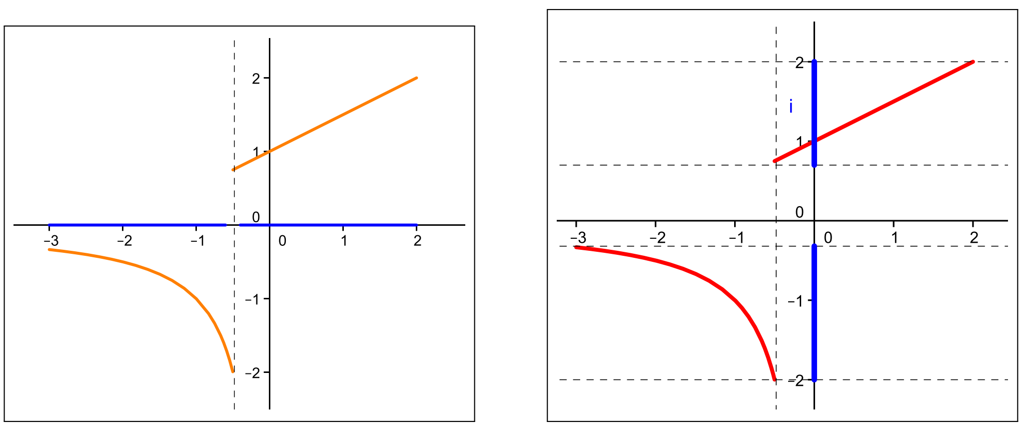


Figura 4.3.13: Gráfico de la función g

En este gráfico, la recta vertical $x = -1/2$ no interseca al gráfico de g. Esto nos indica que el punto $(-1/2)$ no pertenece al dominio de g.



(a) Dominio de g

(b) Imagen de g

Figura 4.3.14: Dominio e imagen de g

En la Figura 4.3.14a vemos que

$$\mathrm{Dom}(g) = [-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2].$$

Con respecto a la imagen, recordemos que se visualiza sobre el eje y. En este ejemplo, observamos que si bien el gráfico queda encerrado entre las rectas $y = -2$ e $y = 2$, los puntos entre $(-1/3)$ y $3/4$ no pertenecen a la imagen de g. La Figura 4.3.14b nos muestra que

$$\mathrm{Im}(g) = [-2, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, 2]$$

Por último, si quisiéramos conocer para qué valores de x se cumple que $g(x) = -\frac{1}{2}$, podemos proceder así: trazamos la recta $y = -1/2$, y marcamos todos los puntos de intersección con el gráfico. En este caso hay un solo punto. La coordenada x de dicho punto ($x = -2$) verifica $g(-2) = -1/2$.

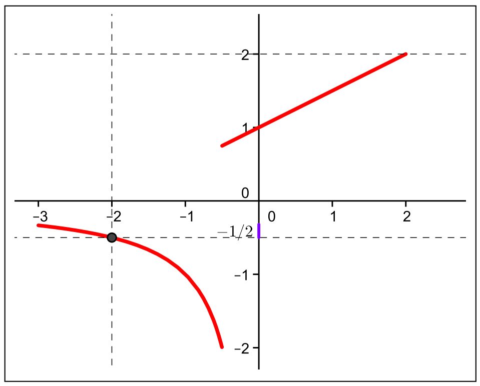


Figura 4.3.15: $g(-\frac{1}{2}) = -2$

4.3.1. Desplazamientos y reflexiones de los gráficos

Si conocemos el gráfico de una función f, podemos determinar fácilmente el gráfico de cualquiera de estas funciones:

$$g(x) = f(x) + c, \qquad h(x) = f(x) - c, \tag{4.3.1}$$

$$k(x) = f(x + c), \qquad l(x) = f(x - c) \tag{4.3.2}$$

donde c es un número positivo. En el caso (4.3.1), se trata de sumar o restar a los valores de $f(x)$ una constante positiva, mientras que en el caso (4.3.2) esta constante se suma o se resta a los valores de x. Para las funciones dadas en (4.3.1) y (4.3.2), se dice que el gráfico se obtiene por un desplazamiento del gráfico de f.

También es sencillo determinar el gráfico de las siguientes funciones:

$$g(x) = -f(x) \qquad \text{y} \qquad h(x) = f(-x). \tag{4.3.3}$$

En este caso, la función g toma los mismos valores que f pero con diferente signo, mientras que la función h evaluada en x toma el mismo valor que f en $-x$. Para las funciones dadas en (4.3.3), el gráfico se trata de una reflexión del gráfico de f respecto del eje x o del eje y.

Ilustraremos estas situaciones con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.7. Consideremos el gráfico de la Figura 4.3.16, que corresponde a $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}$ con dominio en $[-2, 2]$.

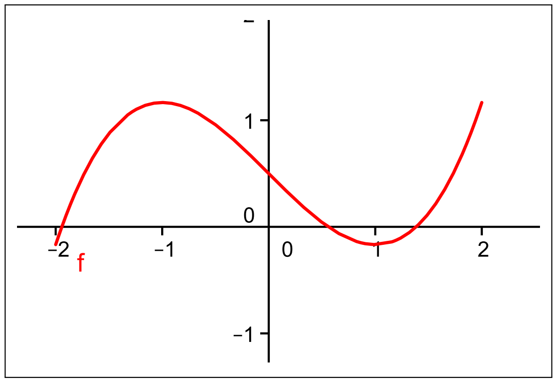


Figura 4.3.16: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}$

Desplazamientos verticales

Si modificamos nuestra función sumándole una constante positiva c:

$$g(x) = f(x) + c$$

el gráfico de la función g tendrá la misma forma que la de f, pero desplazada c unidades hacia arriba.

Tomemos como ejemplo $c = 1$, de modo que

$$g(x) = f(x) + 1.$$

Vemos que $f(2) = \frac{7}{6}$, por lo que el punto $(2, \frac{7}{6})$ pertenece al gráfico de f. Como $g(2) = f(2) + 1 = \frac{13}{6}$, entonces el punto $(2, \frac{13}{6})$ está en gráfico de g.

x	$f(x)$	$g(x) = f(x) + 1$	Puntos en f $(x, f(x))$	Puntos en g $(x, g(x))$
-1	$7/6$	$13/6$	$(-1, 7/6)$	$(-1, 13/6)$
0	$1/2$	$3/2$	$(0, 1/2)$	$(0, 3/2)$
$1/2$	$1/24$	$25/24$	$(1/2, 1/24)$	$(1/2, 25/24)$
1	$-1/6$	$5/6$	$(1, -1/6)$	$(1, 5/6)$

Tabla 4.3.2: Puntos del gráfico de f y del gráfico g

En la Tabla 4.3.2, consideramos otros valores de x y los correspondientes puntos en el gráfico de f y en el gráfico de g. Notemos que en cada fila los puntos del gráfico de f y de g tienen la misma coordenada x, mientras que en la segunda coordenada difieren en una unidad.

En general, para un valor de c cualquiera, por cada punto $(a, f(a))$ en el gráfico de f tenemos el punto $(a, f(a)+c) = (a, g(a))$ en el gráfico de g. Ambos tienen la misma coordenada x pero difieren en c unidades en la segunda coordenada. (Ver Figura 4.3.17a).

Análogamente, el gráfico de la función que se obtiene restando una constante positiva c a f:

$$h(x) = f(x) - c,$$

tiene la forma del gráfico de f pero desplazada c unidades hacia abajo (Ver Figura 4.3.17b).

Por ejemplo, si tomamos $c = \frac{3}{2}$, entonces

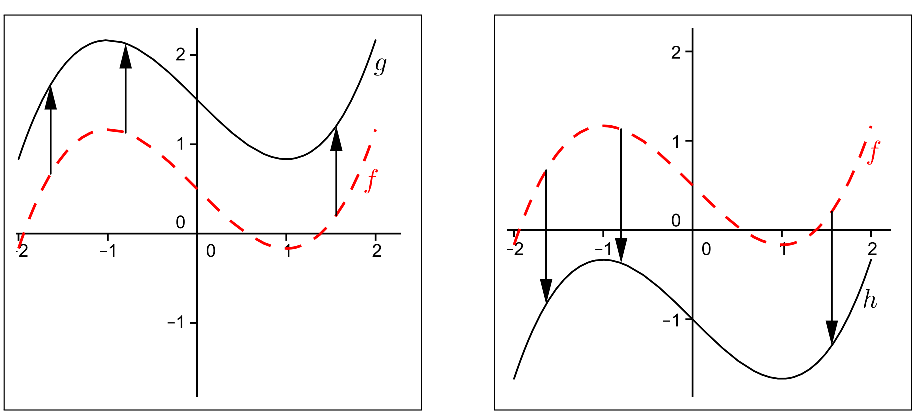
$$h(x) = f(x) - \frac{3}{2}.$$

Para $x = 1$, tenemos que $f(1) = -\frac{1}{6}$ y $h(1) = f(1) - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3}$. Luego el punto $(1, -\frac{1}{6})$ pertenece al gráfico de f mientras que $(1, -\frac{5}{3})$ está en el gráfico de h.

En la Tabla 4.3.3 calculamos puntos del gráfico de f para algunos valores de x, y los correspondientes puntos en el gráfico de h:

x	$f(x)$	$h(x) = f(x) - \frac{3}{2}$	Puntos en f $(x, f(x))$	Puntos en h $(x, h(x))$
-1	$7/6$	$-1/3$	$(-1, 7/6)$	$(-1, -1/3)$
0	$1/2$	-1	$(0, 1/2)$	$(0, -1)$
$1/2$	$1/24$	$-35/24$	$(1/2, 1/24)$	$(1/2, -35/24)$
1	$-1/6$	$-5/3$	$(1, -1/6)$	$(1, -5/3)$

Tabla 4.3.3: Puntos del gráfico de f y del gráfico h



(a) $g(x) = f(x) + 1$ (b) $h(x) = f(x) - \frac{3}{2}$

Figura 4.3.17: Desplazamientos verticales

Desplazamientos horizontales

Consideremos ahora la función $k(x) = f(x + c)$, y tomemos el caso en que $c = 1$:

$$k(x) = f(x + 1).$$

Entonces, si calculamos $k(-1)$, obtendremos el mismo valor que para $f(0)$, pues

$$k(-1) = f(-1+\mathbf{1}) = f(0).$$

Del mismo modo, podemos ver que $k(-3)$ es igual a $f(-2)$ y que $k(-\frac{1}{2})$ es igual a $f(1/2)$:

$$k(-3) = f(-3+\mathbf{1}) = f(-2), \qquad \text{y} \qquad k(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}+\mathbf{1}) = f(\frac{1}{2}).$$

Resumimos esto en la Tabla 4.3.4.

x	Valores de f en x	Valores de k en $x-1$
0	$f(0) = 1/2$	$k(-1) = 1/2$
$1/2$	$f(1/2) = 1/24$	$k(-1/2) = 1/24$
-2	$f(-2) = -1/6$	$k(-3) = -1/6$

Tabla 4.3.4: Valores de f y k

En general, el valor que toma f en un punto a es el mismo que toma k en el punto $a - 1$, pues

$$k(a - 1) = f((a - 1)+\mathbf{1}) = f(a).$$

Así, como $f(0) = 1/2$, entonces el punto $(0, 1/2)$ está en el gráfico de f y el punto $(-1, 1/2)$ está en el gráfico de k. Análogamente, como $f(-2) = -1/6$, entonces $(-2, -1/6)$ está en el gráfico de f y $(-3, -1/6)$ pertenece al gráfico de k. Notemos que el punto $(-1, 1/2)$ se obtiene desplazando al punto $(0, 1/2)$ una unidad hacia la izquierda, porque se le resta a la coordenada x una unidad. Algo similar ocurre con los puntos $(-2, -1/6)$ y $(-3, -1/6)$.

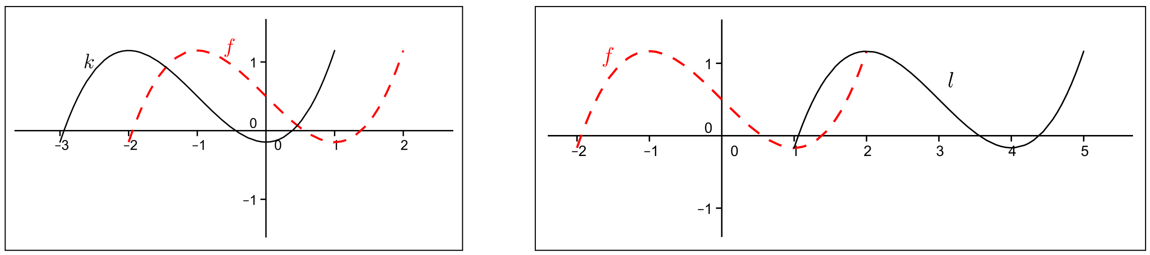
Esto hace que el gráfico de k tenga la misma forma que el de f pero desplazado una unidad **hacia la izquierda**. (Ver Figura 4.3.18a).

Análogamente, si ahora restamos a los valores de x una constante positiva

$$l(x) = f(x - c),$$

entonces el valor que toma f en un punto a es el mismo que toma la función l en el punto $a + c$, pues

$$l(a + c) = f((a + c) - c) = f(a).$$



(a) $k(x) = f(x+1)$ (b) $l(x) = f(x-3)$

Figura 4.3.18: Desplazamientos horizontales

Por esto, el gráfico de l tiene la misma forma que el de f pero desplazada c unidades **hacia la derecha**. (Ver Figura 4.3.18b)

Con el Ejemplo 4.3.7 hemos ilustrado el desplazamiento del gráfico de una función según sumemos o restemos una constante a los valores de $f(x)$ o a los valores de x. Resumimos esto en la siguiente conclusión.

Si f es una función, y c es una constante positiva, entonces:

- El gráfico de $g(x) = f(x) + c$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia arriba**.
- El gráfico de $h(x) = f(x) - c$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia abajo**.
- El gráfico de $k(x) = f(x+c)$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia la izquierda**.
- El gráfico de $l(x) = f(x-c)$ es el gráfico de f desplazado c unidades **hacia la derecha**.

Reflexiones

Nos resta ver qué relación existe entre el gráfico de f y los gráficos de las funciones dadas por $g(x) = -f(x)$ y $h(x) = h(-x)$.

Comencemos con la función g:

$$g(x) = -f(x).$$

Debe notarse que el signo *menos* no indica que g sea negativa, sino que los valores que toma g tienen el signo opuesto a los que toma f. Por ejemplo, como $f(0) = 1/2$ entonces $g(0) = -1/2$. Luego $(0, 1/2)$ está en el gráfico de f y $(0, -1/2)$ está en el gráfico de g. Del mismo modo, como $f(1) = -1/6$, entonces $g(1) = 1/6$. Así, $(1, -1/6)$ pertenece al gráfico de f y $(1, 1/6)$ pertenece al gráfico de g.

En general, si consideramos un punto $(a, f(a))$ en el gráfico de f, como $g(a) = -f(a)$ se cumple que $(a, -f(a))$ está en el gráfico de g. Así, si $f(a)$ es positivo, entonces $(a, f(a))$ es un punto por encima del eje x y $(a, g(a))$ está por debajo del eje x. Recíprocamente, si $f(b)$ es negativo, entonces $(b, f(b))$ está por debajo del eje x y $(b, g(b))$ está por encima. (Ver Figura 4.3.19)

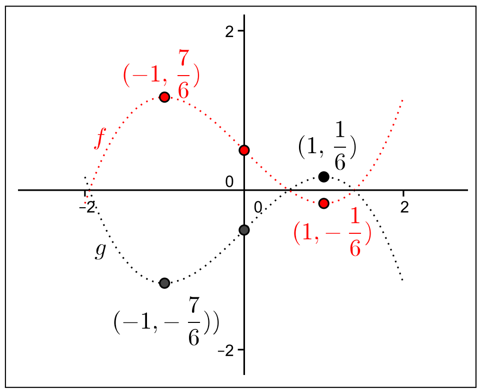


Figura 4.3.19: $g(x) = -f(x)$

Esto hace que el gráfico de g sea como el gráfico de f pero **reflejado** con respecto al eje x. (Ver Figura 4.3.21a).

Consideremos ahora la función

$$h(x) = f(-x).$$

Insistimos nuevamente en que $-x$ denota el opuesto de x. Así por ejemplo, -1 es el opuesto de 1, y $1/2$ es el opuesto de $-1/2$. Por lo tanto, para calcular $h(1)$ necesitamos conocer $f(-1)$, y para $h(-1/2)$ debemos conocer $f(1/2)$. Así, $h(1) = 7/6$ pues $f(-1) = 7/6$, y $h(-1/2) = 1/24$ pues $f(1/2) = 1/24$. Esto en particular implica que el punto $(-1, 7/6)$ está en el gráfico de f y $(1, 7/6)$ en el gráfico de h. Estos dos puntos tienen la misma coordenada y pero sus coordenadas x tienen diferente signo. Análogamente, $(1/2, 1/24)$ y $(-1/2, 1/24)$ son puntos del gráfico de f y h respectivamente, con la misma coordenada y pero con distinto signo en la coordenada x. (Ver Figura 4.3.20)

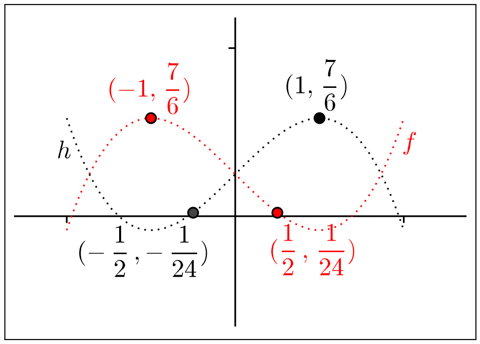
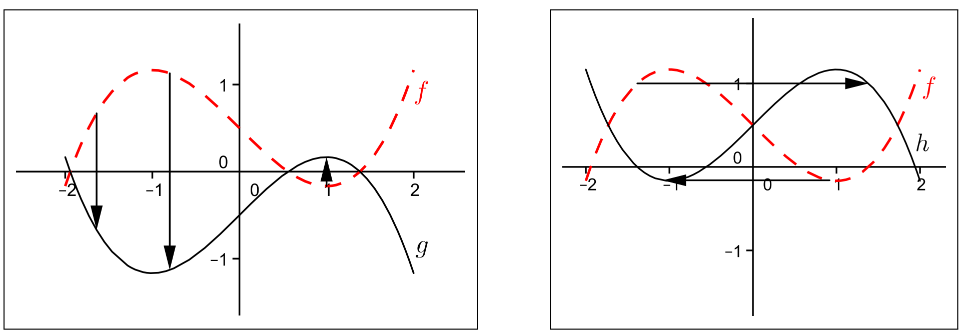


Figura 4.3.20: $h(x) = f(-x)$

En general, por cada punto $(x, f(x))$ en el gráfico de f, el punto $(-x, f(x))$ está en el gráfico de h. Luego el gráfico de h se obtiene a partir del gráfico de f reflejando respecto al eje y.

La Figura 4.3.21b ilustra comparativamente los gráficos de f con g, y f con h, para este ejemplo.



(a) $g(x) = -f(x)$

(b) $h(x) = f(-x)$

Figura 4.3.21: Reflexiones respecto al eje x y al eje y

Si f es una función, entonces:

- El gráfico de $g(x) = -f(x)$ es el gráfico de f **reflejado respecto del eje** x.
- El gráfico de $h(x) = f-(x)$ es el gráfico de f **reflejado respecto del eje** y.

Capítulo 5

Funciones Lineales y Cuadráticas

5.1. Funciones lineales

En la naturaleza y en la vida diaria existe una gran cantidad de fenómenos que pueden explicarse y representarse mediante una función lineal. Del mismo modo, las funciones lineales pueden ser aplicadas a una diversidad de contextos. En este sentido, surge la necesidad e importancia de estudiar funciones lineales buscando reconocer las expresiones de las mismas como su representación gráfica. Con ese fin, a continuación se define y caracterizan tales funciones.

Una función de la forma $f(x) = ax + b$, con a y b números reales fijos, es llamada una **función lineal**. La constante **a** es llamada **pendiente** y la constante **b** es la **ordenada al origen**.

Ejemplos de funciones lineales:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = 2x$;

c) $f(x) = 2x + 1$;

d) $f(x) = -x$;

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

f) $f(x) = 3$.

De acuerdo a la definición dada, todas estas expresiones tienen la forma descripta antes y en ese sentido todas serán funciones lineales. Si ahora observamos el ejemplo b) podemos afirmar que $a = 2$ y que $b = 0$, en el ejemplo e) a toma el valor -1/2 y b es igual a 3. ¿Cuáles son los valores de a y b en los otros ejemplos?

Es claro que la expresión de una función lineal es válida para cualquier número real y de esa manera podríamos afirmar que el dominio de cualquier función lineal es el conjunto de todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Observación: en algunos textos, se suele denominar función de proporcionalidad a una función de la forma $f(x) = ax$ (con $b = 0$) y función afín a $f(x) = ax + b$, con b diferente de 0. Sin embargo, nosotros denominamos función lineal a $f(x) = ax + b$, independientemente del valor que tome b, como se definió anteriormente.

También podemos asociar a una función lineal $f(x) = ax + b$ con la ecuación lineal $y = ax + b$ (**ecuación de la recta**), donde la variable x se denomina **variable independiente** e y **variable dependiente**.

función lineal: $f(x) = ax + b \longleftrightarrow$ **ecuación de la recta:** $y = ax + b$.

El gráfico de una función lineal $f(x) = ax+b$ en un sistema de coordenadas cartesianas está determinado por el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen $y = f(x)$, es decir, que satisfacen la ecuación lineal $y = ax + b$.

Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones lineales:

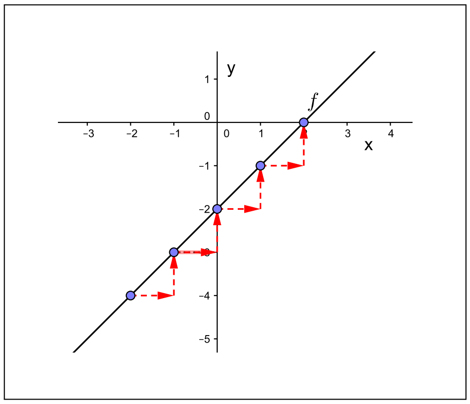
Ejemplo 5.1.1. Sea $f(x) = x - 2$, donde $a = 1$ y $b = -2$.

Para graficar, por ahora, tomemos como ayuda una tabla de valores de puntos en el plano como la que está a continuación:

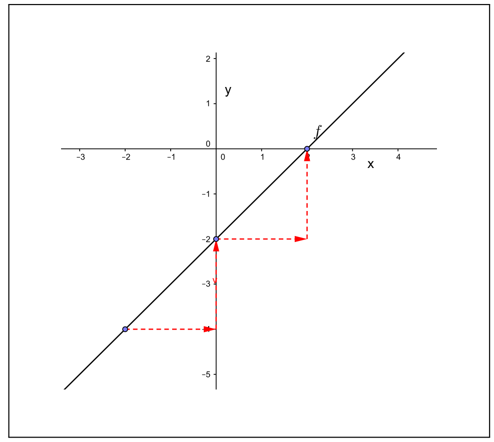
x	y = f(x)	(x,y)
-2	-4	(-2,-4)
-1	-3	(-1,-3)
0	-2	(0,-2)
1	-1	(1,-1)
2	0	(2,0)

De acuerdo con los valores presentados en la tabla anterior, notar que, si la abscisa (esto es, x) aumenta una unidad, la ordenada (esto es, y) también aumenta una unidad. Si la abscisa aumenta dos unidades, la ordenada aumenta dos unidades, como se evidencia en las Figuras 5.1.1 (a) y (b) respectivamente.

Notar en los cálculos de abajo que los cocientes entre la variación de la ordenada (en este caso 1 ó 2) y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.



(a)



(b)

Figura 5.1.1: (a) aumentos de una unidad en x, (b) aumentos de dos unidades en x.

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 = a.$$

Ejemplo 5.1.2. Sea $f(x) = -2x + 1$, donde $a = -2$ y $b = 1$, con una tabla de valores como la siguiente y gráfico tal como se muestra en las Figuras 5.1.2 (a) y (b).

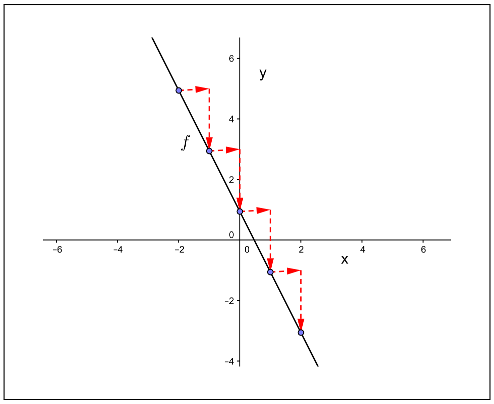
x	y = f(x)	(x,y)
-2	5	(-2,5)
-1	3	(-1,3)
0	1	(0,1)
1	-1	(1,-1)
2	-3	(2,-3)

Observar en este caso que si la abscisa crece una unidad, la ordenada decrece dos unidades. Si la abscisa crece dos unidades, la ordenada decrece cuatro unidades.

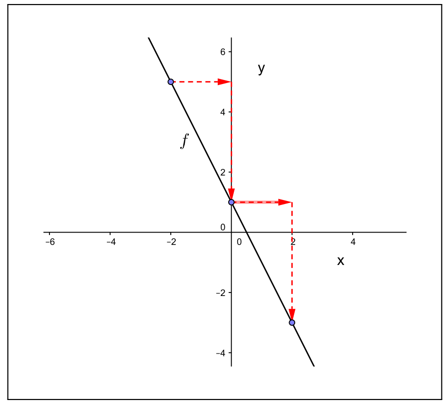
Nuevamente, notemos que los cocientes entre la variación de la ordenada (- 2, -4 o -6 en este caso) y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

$$\frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = -2 = a.$$

Ejemplo 5.1.3. Sea $f(x) = 2$, donde $a = 0$ y $b = 2$. (Recordar el Ejemplo 4.3.2).



(a)



(b)

Figura 5.1.2: (a) aumentos de una unidad en x, (b) aumentos de dos unidades en x.

x	y = f(x)	(x,y)
-2	2	(-2,2)
-1	2	(-1,2)
0	2	(0,2)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)

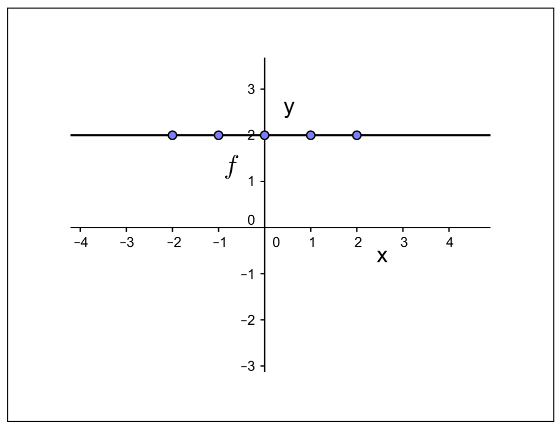


Figura 5.1.3: gráfico de $f(x) = 2$.

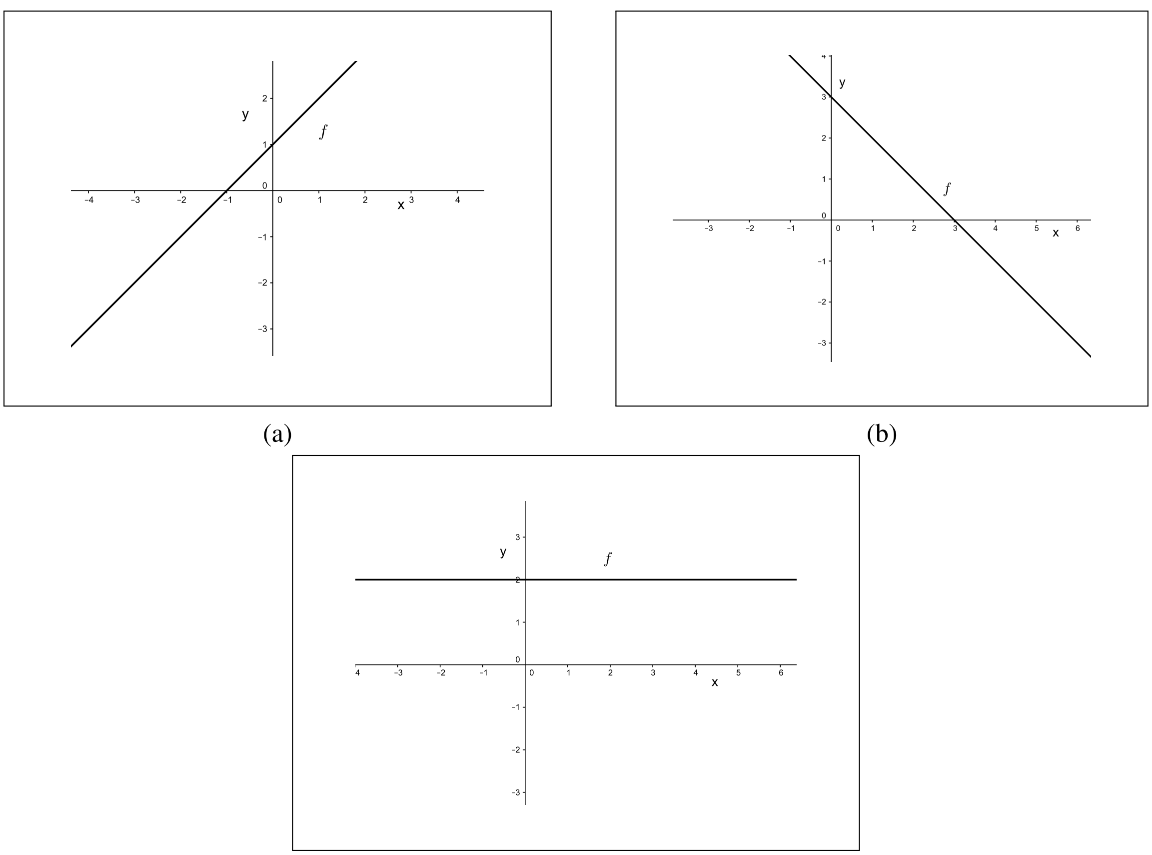
Observar en este ejemplo, que, si la abscisa crece una unidad, la ordenada se mantiene igual (dicho de manera gráfica **no sube ni baja**). Si la abscisa crece dos unidades, la ordenada también se mantiene igual.

Ahora calculamos los cocientes entre las variaciones de la ordenada (siempre sin cambio o cambio nulo) y la abscisa (1, 2 ó 3 en este caso), notamos otra vez que son constantes e iguales al valor de la pendiente:

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = a.$$

Teniendo en cuenta esta relación entre la función lineal $f(x) = ax + b$ y la ecuación de la recta $y = ax+b$, concluimos que el gráfico de una función lineal es una línea recta con pendiente igual a a y que pasa por el punto $P = (0, b)$ pues $f(0) = b$ (lo que es equivalentemente a decir que el punto $(0, b)$ satisface la ecuación de la recta).

En los gráficos presentados en las Figuras 5.1.4 (a), (b) y (c) podemos observar las representaciones gráficas de tres funciones lineales distintas y cómo se pone en evidencia la relación entre el valor de la pendiente a y el tipo de gráfico. Así, cuando $a > 0$, el ángulo entre el gráfico de la función lineal y el eje x será agudo (menor a 90 grados), en cambio si $a < 0$ el ángulo entre el gráfico de la función lineal y el eje x será obtuso (mayor a 90 grados). Por último si $a = 0$, el gráfico de la función lineal será una recta paralela al eje x.



(a) (b) (c)

Figura 5.1.4: (a) $a > 0$, (b) $a < 0$, (c) $a = 0$.

A partir de los ejemplos anteriormente tratados podemos observar que, dados dos puntos arbitrarios $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ sobre una recta, con x_1 distinto de x_2, es posible determinar la pendiente correspondiente de esta manera:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si bien no lo vamos a tratar aquí, esta relación se puede deducir usando semejanza de triángulos.

Recordemos que la ecuación de una recta vertical, paralela al eje y y que pasa por (x_1, y_1) está dada por $x = x_1$ (esto vale para cualquier valor de y), sin embargo es importante notar que tal recta no representa el gráfico de una función pues no satisface la definición de función, tal como fue tratada en la Sección 4.2.

Otra forma útil de representar la ecuación de una recta se obtiene conociendo la pendiente de la recta y un punto por donde pasa la recta. Por ejemplo, supongamos que se tiene una recta que tiene pendiente $a = 2/5$ y pasa por el punto $P = (3, 2)$ entonces cualquier otro punto sobre esa recta tiene la forma $Q = (x, y)$ y debe cumplir que:

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5},$$

y despejando obtenemos:

$$y - 2 = \frac{2}{5}(x-3),$$

o lo que es equivalente

$$y = \frac{2}{5}(x-3) + 2.$$

En general, la ecuación de la recta que pasa por un punto dado (x_1, y_1) y tiene pendiente a está dada por:

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1) \text{ ó } y = a(x - x_1) + y_1.}$$

Ahora, dados dos puntos de una recta no vertical (x_1, y_1) y (x_2, y_2) podemos determinar la función que define esa recta. Para determinar la función que define esa recta basta encontrar el valor de la pendiente a y usar la observación anterior con alguno de los puntos dados:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1) + y_1 \\ f(x) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1. \end{aligned}$$

Sabiendo que el gráfico de una función lineal se corresponde con una recta en el plano, cabe preguntarse, ¿Cómo graficar una función lineal $f(x) = ax + b$ utilizando la menor cantidad de puntos posibles?

Sabemos que dados dos puntos cualesquiera en el plano, por ellos pasa una única recta, por lo tanto es suficiente evaluar la función en dos valores x_1 y x_2, marcar los puntos $(x_1, f(x_1)$ y $(x_2, f(x_2)$ en el plano y por último, trazar la recta que pasa por ellos. Un punto posible puede ser $(0, f(0)) = (0, b)$.

Por ejemplo: para graficar la función lineal $f(x) = 3x - 2$ podemos considerar $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, obteniendo así los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$. Marcamos estos dos puntos en el plano cartesiano y finalmente trazamos la recta que los contiene a ambos o que pasa por ellos dos. Esto es, trazamos la recta correspondiente tal como se muestra en la Figura 5.1.5 y finalmente trazamos la recta correspondiente.

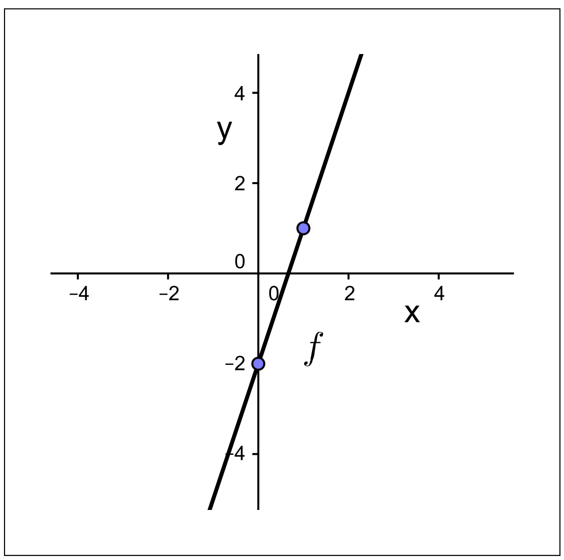


Figura 5.1.5: gráfico de $f(x) = 3x - 2$.

Rectas paralelas y perpendiculares

En esta sección analizaremos relaciones entre dos rectas. Particularmente estudiaremos rectas paralelas y rectas perpendiculares.

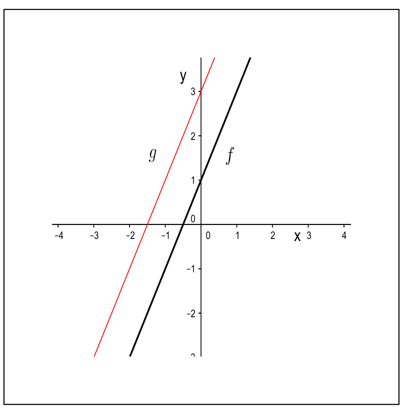
Dos rectas no verticales son **paralelas** si y sólo si tienen la misma pendiente.

Por ejemplo, las rectas $y = 2x + 1$ e $y = 2x + 3$, correspondientes a las funciones lineales $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 2x + 3$ respectivamente, son paralelas pues tienen la misma pendiente $a = 2$. El gráfico de la segunda recta está 2 unidades más arriba que el de la primera.

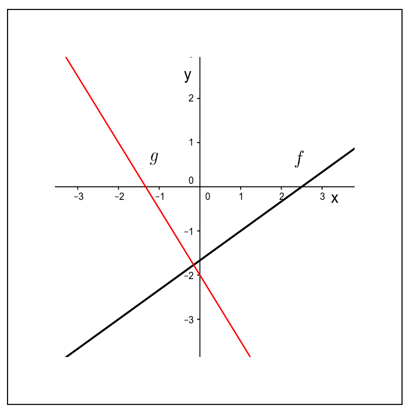
Notar que las ecuaciones de las rectas: $-2x + 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y = 5$ también son paralelas, pues si se calculan sus pendientes se puede verificar que son iguales (para ambas rectas a=2/3). Ver Figura 5.1.6 (a).

> Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

Por ejemplo, las rectas $y = \dfrac{3}{4}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$ son perpendiculares, pues $-4/3$ es el recíproco negativo de $3/4$. Ver Figura 5.1.6 (b). También es fácil ver que las rectas $2x - 3y = 5$ y $3x + 2y = -4$ son perpendiculares calculando las pendientes correspondientes.



(a)



(b)

Figura 5.1.6: (a) 2 rectas paralelas, (b) 2 rectas perpendiculares.

5.2. Funciones cuadráticas

Al igual que las funciones lineales, las funciones cuadráticas aparecen frecuentemente en muchos problemas de la vida diaria (trayectoria de una pelota que es lanzada hacia arriba, arco de un puente, etc.) y en otros problemas más complejos, por lo que es muy importante saber graficarlas e interpretarlas con cuidado.

Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c números reales fijos y $a \neq 0$, es llamada **función cuadrática**.

Es claro que el dominio de las funciones cuadráticas es el conjunto de todos los números reales.

El gráfico de las funciones cuadráticas es una curva llamada **parábola**. Para graficar las funciones cuadráticas vamos a comenzar considerando un caso muy simple en el que $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$: $f(x) = x^2$ cuando x toma valores en el intervalo $[-3, 3]$.

Primero marquemos algunos puntos en el sistema de ejes cartesianos evaluando la función en algunos valores de x en el intervalo dado. Podría ser tentador unir esos puntos por segmentos de rectas pero eso no correspondería al gráfico de una parábola. Evaluando la función en más puntos en el intervalo $[-3, 3]$ y uniéndolos con una curva **suave** en la Figura 5.2.1 podemos observar que el gráfico de la parábola $y = f(x) = x^2$ tiene la forma siguiente:

x	$y = x^2$	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
$-5/2$	$25/4$	$(-5/2, 25/4)$
-2	4	$(-2, 4)$
-3/2	9/4	(-3/2,9/4)
-1	1	(-1,1)
-1/2	1/4	(-1/2,1/4)
0	0	(0,0)
1/2	1/4	(1/2,1/4)
1	1	(1,1)
3/2	9/4	(3/2,9/4)
2	4	(2,4)
5/2	25/4	(5/2,25/4)
3	9	(3,9)

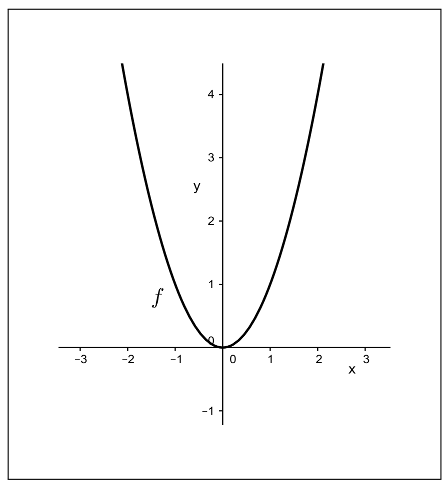


Figura 5.2.1: gráfico de $f(x) = x^2$.

Si ahora consideramos la misma función cuadrática $f(x) = x^2$ al hacer variar x en el intervalo $[-5, 5]$ o $[-10, 10]$ observamos que la forma de la parábola se mantiene, por lo que podemos suponer que también se mantiene este comportamiento si extendemos el gráfico evaluando en diferentes puntos de la recta real.

Para ilustrar con más detalles lo referido a función cuadrática, a continuación consideraremos ejemplos que pueden ser vistos como variantes de la parábola graficada en la Figura 5.2.1.

Ejemplo 5.2.1. Sea $g(x) = -x^2$

Para graficar esta función sólo se debe reflejar el gráfico de $f(x) = x^2$ con respecto al eje x (recordar que esta idea de reflejar un gráfico ya fue discutida en secciones anteriores) tal como se muestra en la Figura 5.2.2.

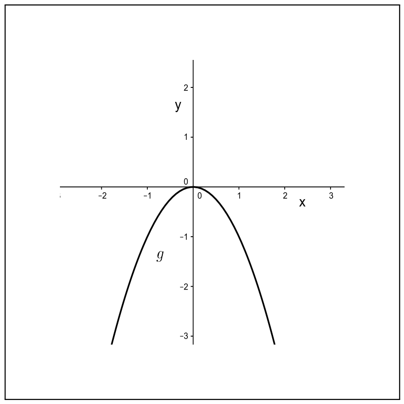


Figura 5.2.2: gráfico de $g(x) = -x^2$.

Observación: el signo de a, el coeficiente que acompaña a x^2, indica hacia donde apuntan las ramas de la parábola: si $a > 0$ entonces las ramas de la parábola apuntan hacia arriba (como en $f(x) = x^2$), en cambio si $a < 0$, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo (como en $g(x) = -x^2$). Además, si $0 < a < 1$ (ver gráfico de $g(x)$, en Figura 5.2.3) las ramas de la parábola serán más abiertas que en el caso $a = 1$ y si $a > 1$ (ver gráfico de $h(x)$, en Figura 5.2.3) las ramas de la parábola serán más cerradas que en el caso $a = 1$.

Ejemplo 5.2.2. Sea $g(x) = x^2 + 2$

Para graficar esta función sólo se debe trasladar el gráfico de $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba. Ver Figura 5.2.4 (a) (recordar lo visto en secciones anteriores sobre desplazamientos y reflexión de gráficos).

Ejemplo 5.2.3. Sea $g(x) = (x - 2)^2$

Para graficar esta función sólo se debe trasladar el gráfico de $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha, pues cuando $x = 2$, tenemos $g(2) = 0$. Recordar el apartado sobre desplazamiento de gr´áficos dado en secciones anteriores. Ver Figura 5.2.4 (b).

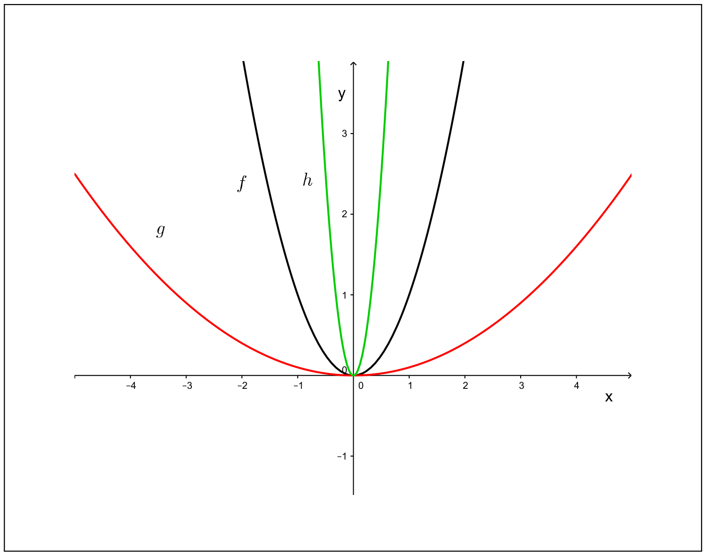
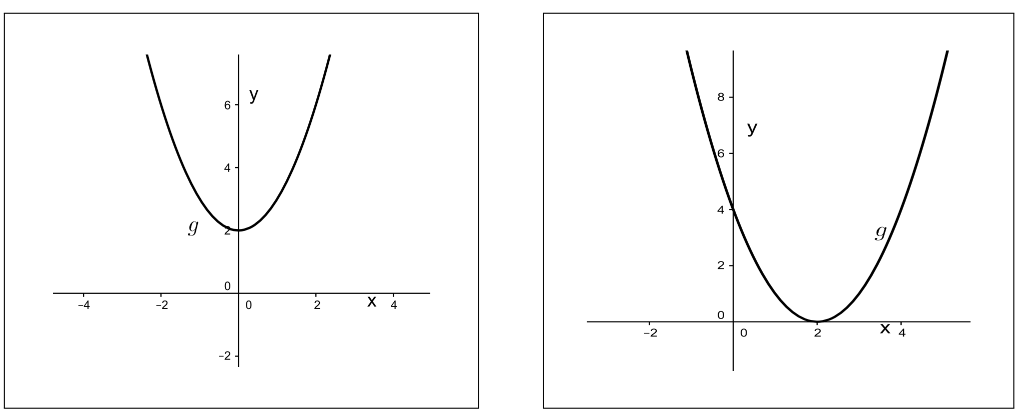


Figura 5.2.3: gráfico de $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{10}x^2$ y $h(x) = 10x^2$.



(a) (b)

Figura 5.2.4: (a) $g(x) = x^2 + 2$, (b) $g(x) = (x - 2)^2$.

Ejemplo 5.2.4. Sea $g(x) = x^2 - 4x + 4$

Para graficar esta función basta notar que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, es decir que es la misma función cuadrática del ejemplo anterior, por lo tanto, el gráfico será el mismo.

Ejemplo 5.2.5. Sea $g(x) = x^2 - 4x + 6$

Para graficar esta función basta notar que si completamos cuadrados:

$$x^2 - 4x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4 + 6 = (x-2)^2 + 2,$$

y tomando en cuenta los Ejemplos 2 y 3, podemos graficar g desplazando la parábola de $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba y dos unidades hacia la derecha.

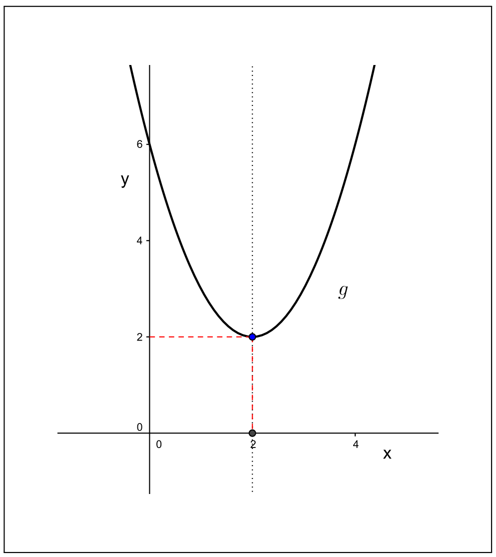
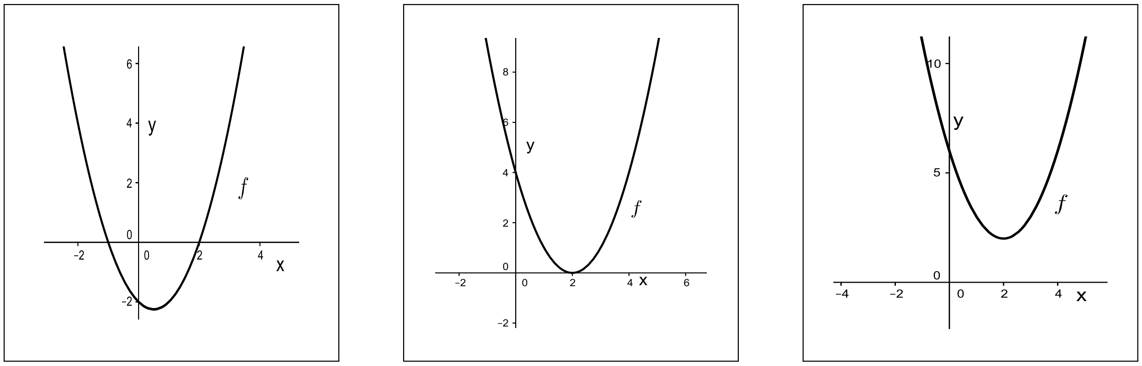


Figura 5.2.5: gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 6$.

En general, para graficar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se deben tener en cuenta algunos puntos característicos:

- la intersección con el eje de las ordenadas: el punto $(0, f(0))$.

- la intersección con el eje de las abscisas. Estos puntos corresponden a las raíces de $f(x) = 0$. Recordemos que una ecuación cuadrática puede tener: $i)$ dos raíces reales y distintas (el gráfico de la cuadrática debe atravesar el eje x); $ii)$ dos raíces reales e iguales (el gráfico de la cuadrática toca el eje x pero no lo atraviesa); o $iii)$ dos raíces complejas conjugadas



(a) (b) (c)

Figura 5.2.6: (a) 2 raíces reales y distintas, (b) 2 raíces reales iguales, (c) 2 raíces complejas conjugadas.

(el gráfico de la cuadrática no toca al eje x). En la Figura 5.2.6 se ilustran los tres casos anteriores.

- el vértice (mínimo o máximo) de la cuadrática. Las coordenadas de este punto son:

$$\boxed{(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)}$$

Las coordenadas del vértice pueden deducirse completando cuadrados:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Si $a > 0$, el vértice será denominado el **mínimo** de la parábola y se alcanza cuando $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v) = -\frac{b^2}{4a} + c$. Por otro lado, si $a < 0$, el vértice será denominado el **máximo** de la parábola y se alcanza cuando $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v) = -\frac{b^2}{4a} + c$. Es fácil ver que la coordenada x_v determina el **eje de simetría de la parábola** ($x = x_v$)y puede obtenerse también como el promedio de las raíces:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.}$$

Ejemplo 5.2.6. Para la función $f(x) = x^2 - 3x + 3$ determinar las coordenadas del vértice, el eje de simetría y realizar el gráfico de f.

Respuesta:

Completando cuadrados, podemos escribir:

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Notemos que como el coeficiente de x^2 es positivo, el gráfico de f tendrá las ramas hacia arriba y por lo tanto el vértice será un mínimo de la parábola. Además, hemos escrito a f como una suma de dos términos: $(x - \frac{3}{2})^2$ el cual es mayor o igual a cero y otro término $\frac{3}{4}$, el cual es positivo. Por lo tanto, el menor valor de f se alcanzará cuando el primer término sea igual a cero, y esto ocurre si $x = \frac{3}{2}$, y en este caso, $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$. Utilizando la fórmula dada arriba, se puede comprobar que $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ corresponde a las coordenadas del vértice.

Luego, el eje de simetría es $x = x_v = \frac{3}{2}$.

Para realizar el gráfico de f, calculemos el discriminante de la cuadrática: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$, por lo tanto la cuadrática no tiene raíces reales y no cortará el eje de las abscisas. Luego para dibujar la cuadrática basta utilizar el eje de simetría ($x = \frac{3}{2}$) junto con el punto determinado por la intersección con el eje de las ordenadas: $(0, 3)$. Precisamente, debido a la propiedad de simetría podemos determinar que la parábola también debe pasar por el punto $(3, 3)$. Con toda esta información podemos realizar el gráfico de f, como se muestr en la Figura 5.2.7:

Ejemplo 5.2.7. Hallar la intersección de la parábola $y = 2x^2 - 3x + 2$ y la recta $y = 3x - 2$.

Respuesta:

Como los primeros miembros de las dos ecuaciones son iguales, por un lado: $y = 2x^2 - 3x + 2$ y por otro: $y = 3x - 2$, entonces los segundos miembros también lo son, es decir:

$$2x^2 - 3x + 2 = 3x - 2.$$

Luego, agrupando todos los términos en el lado izquierdo obtenemos:

$$2x^2 - 6x + 4 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadática obtenemos las raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Estas números corresponden a las primeras coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola y la recta. Para determinar las respectivas segundas coordenadas es suficiente evaluar x_1 y x_2 en las

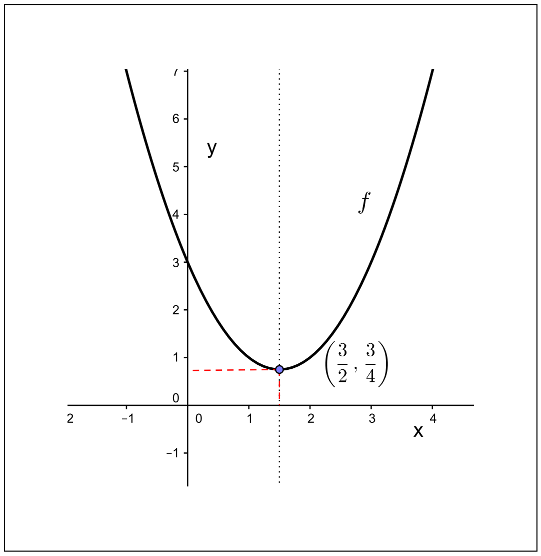


Figura 5.2.7: gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

ecuaciones que definen la parábola o la recta. Es decir, si $x_1 = 1$, entonces $y_1 = 3(1) - 2 = 1$, y si $x_2 = 2$ entonces $y_2 = 3(2) - 2 = 4$. Luego las coordenadas de los puntos de intersección son $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (2, 4)$. Gráficamente

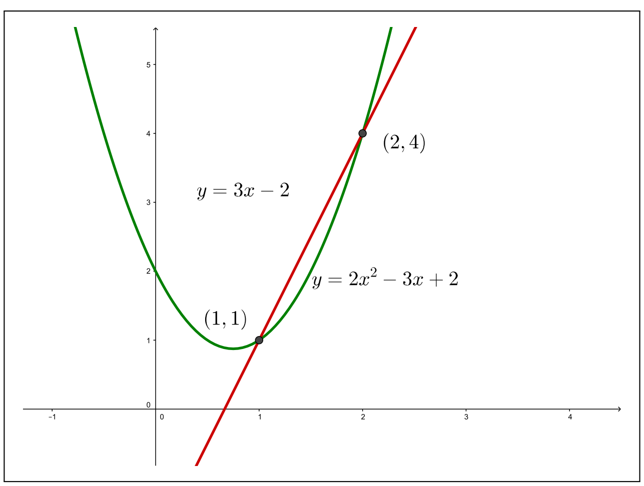


Figura 5.2.8: gráficos de $y = 2x^2 - 3x + 2$ e $y = 3x - 2$.

5.3. Funciones definidas por partes

Una función definida por partes es una función donde la regla que la define cambia dependiendo del valor de la variable independiente. Formalmente, su definición está dada sobre varios conjuntos disjuntos de su dominio.

Ejemplo 5.3.1. Un ejemplo conocido de una función definida por partes es la función valor absoluto, cuyo dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Así para valores de x menores que 0 la función f se define como $f(x) = -x$, en cambio para valores de x mayores o iguales que 0, se define $f(x) = x$. Ver el gráfico que se presenta en la Figura 5.3.1.

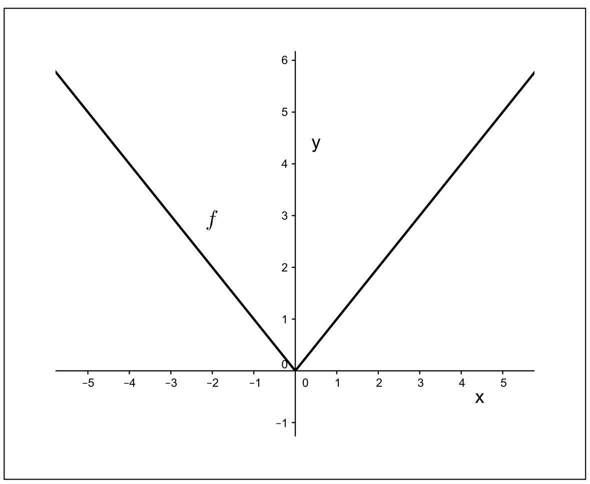


Figura 5.3.1: gráfico de $f(x) = |x|$.

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 5.3.2. Sea

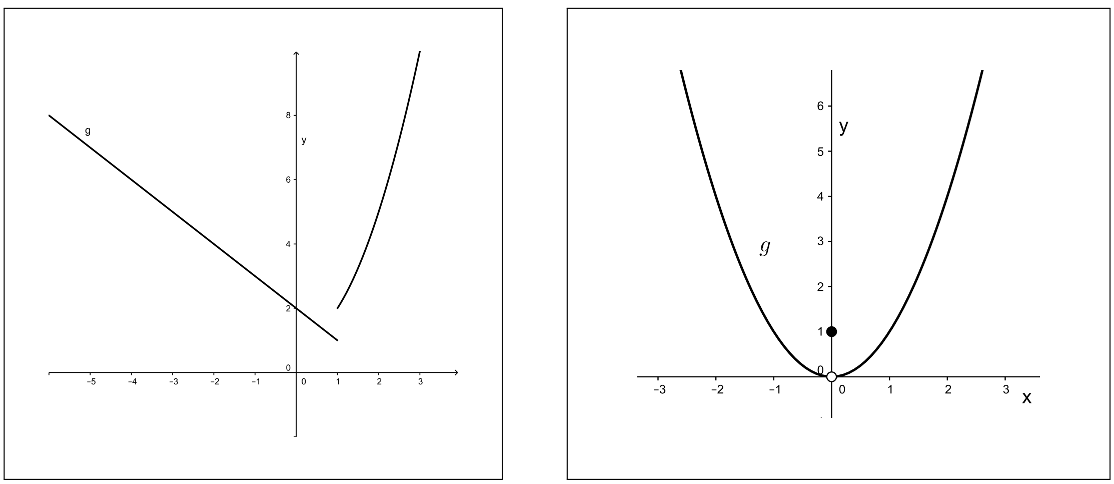
$$g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En este caso, la funcón g está definida como una recta para los valores de x menores que 1 y como una parábola para los valores de x mayores o iguales a 1. (Ver el gráfico en la Figura 5.3.2 (a)).

Ejemplo 5.3.3. Por último, veamos un ejemplo de una función definida por partes, donde la regla que define la función cambia en un único punto.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notemos que el gráfico de la función corresponde a una parábola excepto en el punto $x = 0$, donde h vale 1. (Ver el gráfico en la Figura 5.3.2 (b)).



(a) (b)

Figura 5.3.2: (a) Ejemplo 5.3.2, (b) Ejemplo 5.3.3.

5.4. Ejercicios de funciones

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x + 7$

   b) $g(x) = 2x + 7, \quad 0 \leq x \leq 6$

   c) $h(x) = \dfrac{2}{3x - 5}$

   d) $j(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 + x + 1}$

   e) $s(x) = \sqrt{1 - x}$

   f) $r(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   g) $k(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$

   h) $l(x) = \sqrt{|x|}$

   i) $m(x) = 1 - \sqrt{x}$

   j) $n(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

   k) $i(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

   l) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

2. Dadas las siguientes funciones, evaluar cada una de ellas en el punto indicado a:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{x} & a = \dfrac{1}{4} \\
g(x) = \dfrac{1}{x+5} & a = \dfrac{1}{4} \\
h(x) = x + 1 & a = -1 \\
l(x) = \dfrac{1}{x} & a = \dfrac{2}{3} \\
m(x) = 3x - 2 & a = 0 \\
t(x) = x^2 & a = -\dfrac{4}{3}
\end{array}
$$

3. La Figura 5.4.1 muestra el gráfico de una función f. A partir de este gráfico determinar:

   a) El dominio de f.

   b) La imagen de f.

   c) $f(3)$

   d) Los valores de x donde $f(x) \leq 3$.

   e) Los valores de x donde $f(x) > 3$.

4. A partir del gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, visto en el Ejemplo 4.3.4, esbozar el gráfico de las siguientes funciones:

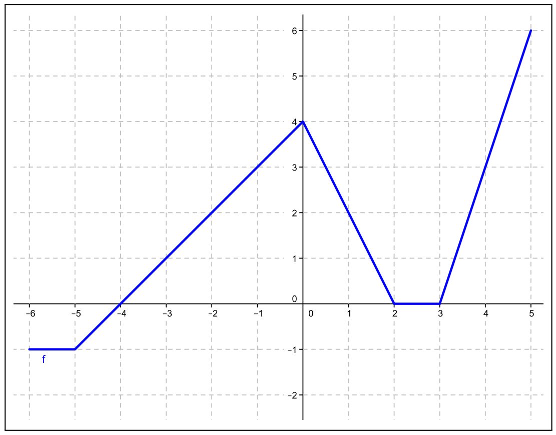


Figura 5.4.1: Gráfico de f. Ejercicio 3

a) $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ *b*) $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$ *c*) $z(x) = \dfrac{x+1}{x}$

5. A partir del gráfico de la función g dada en la Figura 5.4.2, esbozar los gráficos de las funciones:

   a) $f(x) = g(-x)$

   b) $h(x) = -g(x)$

   c) $k(x) = g(x+1)$

   d) $p(x) = g(x) + 1$

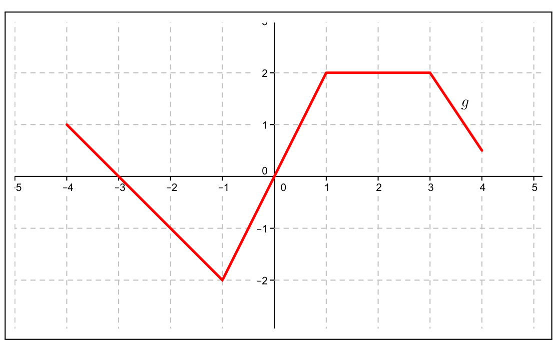


Figura 5.4.2: Gráfico de g. Ejercicio 5

6. Realizar el gráfico de las siguientes funciones lineales:

   a) $f(x) = 3x + 1$ *b*) $g(x) = -2x + 5$ *c*) $h(x) = -x$

7. Graficar el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones. Indicar en qué casos este gráfico es una recta, y en qué casos se corresponde al gráfico de una función lineal.

   a) $y - 1 = 3x$
   b) $y = |x| + 1$
   c) $y = 3$
   d) $x = 2$
   e) $x + 1 = 2y$
   f) $|y| = |x|$

8. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (-5, 0)$ y $Q = (0, 2)$. Determinar la pendiente y la ordenada al origen.

9. El gráfico de la función lineal $f(x) = ax + b$ pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(3, 1)$. Determinar los coeficientes a y b.

10. Las rectas determinadas por las ecuaciones $y = ax + 16$ e $y = -7x + b$ se intersecan en el punto $(-3, 17)$.

    a) Calcular los coeficientes a y b para cada una de estas rectas.
    b) Graficar ambas rectas.

11. Considerar la recta dada por la ecuación $y = 3x + \frac{2}{3}$:

    a) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a la dada y que pasa por el punto $P = (4, -1)$.
    b) Determinar el punto de intersección entre ambas rectas.

12. *a*) Escribir la ecuación de la función lineal f tal que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 2$.
    b) Determinar para qué valor de x se cumple $f(x) = 4$.
    c) Indicar si la recta determinada por $y = f(x)$ es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.
    d) Esbozar un gráfico de cada una de las rectas.

13. Dada la recta con ecuación $y = \dfrac{3}{4}(1 - x)$:

    a) Escribir la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $(1, -1)$.
    b) Dar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por $(1, -1)$.

14. Para cada una de las siguientes funciones determinar

    a) Las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.
    b) La ecuación de la recta que es eje de simetría de la parábola.
    c) Las coordenadas del vértice de la parábola.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $g(x) = -2x^2 + x + 3$

c) $h(x) = 2x^2 + 2 + 4x$

d) $F(x) = -(x-1)(x+2)$

e) $G(x) = -x^2 - 1$

f) $H(x) = (x-2)^2 + 3$

15. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + b\,x + 2$ corta al eje x en $-\dfrac{1}{3}$ y 2.

    a) Dar las coordenadas del vértice del gráfico de f.

    b) Calcular el valor de b.

    c) Dibujar el gráfico de f.

16. Para la función cuadrática $f(x) = 5x^2 + 3x$.

    a) Dar las coordenadas (x_v, y_v) del vértice de la parábola y las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección de la parábola con el eje x y con el eje y.

    b) Indicar si el punto $(-1, 2)$ pertenece o no al gráfico de la parábola.

    c) Con la información obtenida en 16*a*), realizar un gráfico a escala de la función cuadrática.

17. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina una parábola que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(4, 2)$, y su vértice tiene coordenadas $(x_v, 0)$.

    a) Calcular la coordenada x_v del vértice de la parábola.

    b) Calcular los coeficientes a, b y c.

    c) Indicar si f tiene dos raíces distintas, una o ninguna.

    d) Con la información obtenida, esbozar el gráfico de la parábola.

18. El gráfico de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2x$ tiene vértice en $(1, 1)$.

    a) Dar los puntos de intersección del gráfico con los ejes coordenados.

    b) Calcular el valor de a.

    c) Trazar el gráfico de f.

19. Determinar el dominio de las siguientes funciones y realice su gráfico:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

e) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f) $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

h) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

20. Considerar la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 4 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } 4 \leq x \leq 7 \\ x^2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

a) evaluar $f(-10), f(4), f(9/2), f(31/5), f(7)$ y $f(10)$.

b) determinar el dominio de f y realizar su gráfico.

21. Obtener la intersección de las siguientes funciones y dibujar la región encerrada por ellas:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ y $g(x) = x + 10$

b) $f(x) = (x-2)(x+1)$ y $g(x) = -x(x-3)$

c) $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = -x + 3$ y $h(x) = 1$

d) $f(x) = 2x,\ g(x) = x$ y $h(x) = -x + 6$